EL PROCESO COGNITIVO DE LA VISUALIZACION EN LOS ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR MEDIANTE EL USO DE SOFTWARE DINAMICO (CABRI) EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMETRICOS

Dr. Carlos Wilson Lizarazo Gómez

cwlizarazo@uninorte.edu.co

Universidad del Norte - Universidad del Atlántico. COLOMBIA

RESUMEN

En este estudio se describen y analizan los procesos cognitivos que intervienen en el desarrollo de la capacidad geométrica de la visualización en los estudiantes de nivel superior de la Universidad del Atlántico, cuando resuelven problemas de tipo geométrico mediante el uso de papel y lápiz, y comparan el concepto solución mediante el uso de software dinámico Cabri. Esta investigación se ajusta a los principales referentes teóricos en la disciplina principalmente el modelo teórico propuesto por Duval (1998).

INTRODUCCIÓN

Toda actividad matemática requiere de un amplio conocimiento.

En este curso no se pretende rezagar a un lado los métodos tradicionales de enseñanza-aprendizaje de la matemática, por el contrario permite fortalecerlos mediante técnicas avanzadas asistidas por computador; estudios realizados, últimamente por expertos en la disciplina recomiendan que la computadora no resuelve el problema, le facilita al estudiante una mejor correspondencia entre el universo visual y el numérico, y en este sentido le brinda la oportunidad de analizar y justificar sus conjeturas.

La investigación empírica producida en un ambiente dinámico de geometría contiene objetos y transformaciones sobre los objetos. Preferiblemente, las investigaciones deben estimular a los estudiantes a observar y describir un patrón y, además, explorar ese patrón para determinar una generalización. (Pence, 1999, p.430)

Qué tipo de representaciones utilizan los estudiantes al resolver problemas a través del software dinámico Cabrí? ¿Qué ventajas o limitaciones ofrece a los alumnos el empleo de esta herramienta tecnológica en el aprendizaje de la Matemática? ¿Qué tendencias muestran los alumnos al emplear el *software* dinámico Cabrí Géometrè en la búsqueda de argumentos para plantear y justificar conjeturas? Estas son sólo algunas preguntas que aparecen en la agenda de Investigación relacionadas con el uso de la tecnología en el aprendizaje de la Matemática

En el estudio se hace referencia a algunos resultados de investigación que resaltan aspectos relacionados con el uso de tecnología en Educación Matemática (específicamente, la incorporación del software dinámico Cabrí y el uso de la TI-92 en el aprendizaje de los alumnos), la resolución de problemas, el planteamiento y formulación de conjeturas en ambientes dinámicos y, por último, algunas funciones y/o fines de la prueba matemática en nuestros días.

El objetivo del estudio es indicar los aspectos del quehacer matemático (como el trabajo con casos particulares, la formulación de preguntas, el cálculo de medidas y la búsqueda de invariantes entre otros aspectos) que se favorecen en los alumnos después de haber realizado una serie de actividades de resolución de problemas con el uso sistemático del *software* dinámico; asimismo, se busca resaltar las tendencias que muestran los alumnos al usar Cabrí como herramienta durante el proceso de ejecución del trabajo.

En este sentido los profesores y estudiantes tienen la oportunidad de ampliar sus conocimientos en la asignatura de Geometría plana y otras ciencias afines; así mismo lograr mejor desempeño en sus actividades escolares. Verillón y Rabardel (2003) “estiman crucial que los profesores deben participar en el diseño de actividades para que haya una sinergia entre los alumnos y la tecnología” y de esta forma disminuir los altos índice de reprobados en el área de Matemáticas.

A continuación se describe el diseño de algunas actividades relacionadas con la solución de problemas que permite al estudiante identificar cuándo han transformado el artefacto ’‘software’ en una herramienta matemática de trabajo. Además, se pretende determinar si existen líneas de evolución en los procesos de formulación y explicación de conjeturas por parte de los estudiantes en ambientes de resolución de problemas cuando se trabaja con Cabrí.

ACTIVIDAD 1

CONSTRUCCIONES BASICAS

Nombre:-

---

1. Abre el programa The Geometer 's Cabri.
2. Construye segmento ***AB*** y determina su punto medio ***M.***
3. Traza el círculo de centro ***M*** y radio ***MA.***
4. Construya la recta que sea perpendicular
5. Determina los puntos de intersección de esta recta con la circunferencia, sean ***C*** y ***D*** esos puntos de intersección.
6. Construye el cuadrilátero ***ADBC*** y oculta la recta, el punto ***M*** y el segmento ***AB.***
7. ¿Qué características presenta el cuadrilátero ***ADBC?***
8. Determina la medida de cada uno de los lados y de los ángulos del cuadrilátero ***ADBC***.
9. Mueve los puntos ***A*** y/o ***B***, ¿Qué otras características puedes agregar a las presentadas en el punto 7?
10. Guarde el archivo en una carpeta con su nombre.

ACTIVIDAD 2

CONSTRUCCION DE CUADRADO

Nombre:-

---

1. Construye un segmento ***AB.***
2. Construye una recta perpendicular al segmento que pase por el punto ***A***.
3. Traza el círculo con centro en ***A*** y radio ***AB***.
4. Determina un punto de intersección de este círculo con la recta perpendicular al segmento, sea ***C*** ese punto.
5. Traza una perpendicular por ***B*** al segmento ***AB.***
6. Construye una paralela al segmento ***AB*** que pase por ***C***, sea ***D*** el punto de intersección de las dos últimas rectas trazadas.
7. Oculta las tres líneas rectas y la circunferencia.
8. Construye el cuadrado ***ABDC***.
9. Guardar el archivo en su carpeta.

10. ¿Qué argumentos darías para justificar que la construcción corresponde a la de un cuadrado?

ACTIVIDAD 3

TRIANGULOS

Nombre:____

1. Construya un triangulo, sean ***A***, ***B*** y ***C*** sus vértices.
2. Determina la medida de cada uno de los ángulos del triángulo y cada una de esas medidas.
3. Mueve los vértices del triangulo, ¿Qué puedes observar en la suma de las medidas de los ángulos?

4. Construye las alturas de cada una de los lados del triángulo, sea ***O*** el punto de intersección de dos de estas alturas.
5. ¿Qué características puedes observar en esta construcción? Mueve los vértices del triángulo, para verificar tu conjetura.

6. Construye las medidas del triángulo y determina el punto de intersección de dos de estas.
7. ¿Qué puedes observar en esta construcción? Mueve los vértices del triangulo para comprobar las características observadas.

ACTIVIDAD 4

TRIANGULO (SEGMENTO PUNTOS MEDIOS DE DOS LADOS)

Nombre:____

1. Construye un triángulo cualquiera, sea ***A,B*** y ***C*** sus vértices.
2. Sea ***D*** y ***E***, respectivamente, los puntos medios de los lados ***AC*** y ***BC*** del triángulo ***ABC***.
3. Traza el segmento ***DE***.
4. Determina la medida de los ángulos ***CDE*** y ***CAB***, al mover cualesquiera de los vértices del triángulo ***ABC***, describe el comportamiento de los ángulos, ¿Qué sucede con la longitud del segmento ***DE*** y el lado ***AB?***
5. Escribe, a partir de lo observado en el inciso anterior, algunas propiedades relevantes de los segmentos ***DE*** y ***AB.***
6. Guarde los resultados obtenidos con el software dinámico (Cabrí) en su carpeta

Como pueden observar, este tipo de actividades te permiten explorar y conjeturar acerca de algunas construcciones básicas en geometría, que más adelante son tenidas en cuenta para hacer construcciones más rigurosas en cuanto a la solución de problemas.

Kieran and Guzmán (2003) afirman que entre profesores, estudiantes y tecnología debe existir una sinergia en el diseño e implementación de las actividades.

Lizarazo, C. (2006) propone que los profesores deben participar activamente en el diseño de actividades, y en este sentido orientar el desarrollo de las mismas en el aula de clase.

Ahora bien, se complementa el curso con otra serie de actividades relacionadas con la resolución de problemas.

ACTIVIDAD 5

CONSTRUCCIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Nombre:____

__

1. Mostrar ejes.

2. Construya un círculo de radio 1, referencie como centro el origen de los ejes coordenados.
3. Mostrar las coordenadas del punto de intersección del círculo con el radio.
4. Construya una semirrecta en cualquier lugar
5. Traza un arco, a partir del punto de intersección del círculo con el radio, hasta el punto de intersección con el eje X.
6. Calcula la longitud del arco, y con transferencia de medidas ubica el punto sobre la recta.
7. Traza una recta perpendicular a la semirrecta que pase por el punto.
8. Ahora sobre la perpendicular, y a partir del punto de intersección trace un vector.
9. Con transferencia de medidas traslade el valor de la ordenada sobre el vector que se registra en el punto de intersección del círculo con el radio.
10. Activar con traza el punto sobre el vector y con animación observe la gráfica correspondiente a la función seno que se genera para un periodo.
11. ¿De que otra manera puedes expandir la función?
12. De manera análoga construya las otras funciones trigonométricas.

A continuación se describen varios procedimientos para la construcción de Cónicas, a partir de un segmento dado o un círculo; por ejemplo, identifique los elementos que identifican una parábola, a partir de un segmento ***AB***.

ACTIVIDAD 6

PROCEDIMIENTO PARA CONSTRUIR LA PARABOLA

Nombre:____

1. Traza un segmento cualquiera ***AB***.
2. Ubique un punto M sobre el segmento ***AB***
3. Traza una recta perpendicular al segmento ***AB*** que pase por el punto ***M*** etiquétela como L1.
4. Coloca un punto ***F*** en el plano, una los puntos con el segmento FM.
5. Traza una recta perpendicular al segmento FM que pase por su punto medio.

6. Hallar el punto de intersección P de la recta trazada en el paso 5 con la recta L1.
7. Traza una perpendicular a L1 que pase por el punto M ¿Qué representa esta recta En la construcción de una parábola?
8. Hallar el lugar geométrico de P con respecto a M.

En el desarrollo del estudio se pretende que los profesores y estudiantes participen activamente en el laboratorio de matemáticas, propiciando ambiente de aprendizaje en los que tengan la oportunidad de trabajar con *software* dinámico (Cabrí II y Plus) y la TI-92 un conjunto de tareas que les permita una constante reflexión acerca de las relaciones que plantean durante el proceso de solución de cada problema planteado.

El objetivo principal de la capacitación es identificar algunos aspectos relacionados con el tipo de razonamiento que muestren los profesores en procesos de formulación y justificación de conjeturas durante el desarrollo de una serie de tareas con el uso de cabrí. En este sentido, se pretende investigar y documentar algunos aspectos del quehacer matemático, como el trabajo con casos particulares, la formulación de preguntas, el cálculo de medidas y la búsqueda de invariantes entre otros.

Específico:

El NCTM (2005) señala que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de tecnologías en la *resolución de problemas* se debe propiciar un ambiente de clase en el que estudiantes:

- tengan libertad de *comunicar* sus ideas,
- realicen *conexiones* de nuevos contenidos con conocimientos previos y con la vida real,
- razonen acerca de algunas ideas involucradas en problemas y realicen demostraciones matemáticas y
- empleen diversas *representaciones* para que puedan comprender y explicar los procedimientos que desarrollan.

IMPACTO QUE SE ESPERA DEL SEMINARIO E INNOVACIÓN EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE:

En los trabajos de geometría plana es importante comprender los conceptos, definiciones, postulados, teoremas *et al,* para ser aplicados en la prueba formal, dicha prueba se aborda mediante actividades con papel y lápiz; una pregunta interesante surge cuando se pretende que los alumnos aprendan a demostrar a partir de la exploración y justificación de sus conjeturas mediante el uso de software dinámico. Desde este punto de vista, tiene sentido la siguiente pregunta ¿qué relación hay entre el aprendizaje de conceptos matemáticos con actividades resueltas con papel y lápiz y el uso de Cabrí?. En la medida en que no se entienda la relación entre tecnología y aprendizaje, resulta imposible responder, e incluso plantear correctamente, preguntas especificas de matemáticas.

Por extraño que pueda parecer, se han hecho pocos estudios relacionados con el papel del software dinámico en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en forma sistemática y detallada. En general, las formas de enseñanza y de aprendizaje basadas en los métodos tradicionales que predominaron durante el pasado decenio fueron considerados como los únicos, mediante los cuales los alumnos podían demostrar apoyados con regla, papel y lápiz. Se desarrollaron y perfeccionaron métodos de solución apoyados en algún *software* elaborado, especialmente, para que el alumno aprenda de manera autónoma Engler *et al.* (2001, p. 127).

En la solución de problemas, es posible analizar los métodos tradicionales y describir las ventajas y limitaciones que encuentra el alumno cuando hace uso de ellos. Ahora, pretender abordar la solución con el software dinámico es otra forma de acercarnos al problema mediante el uso de tecnología en la enseñanza- aprendizaje de la geometría. Esta forma de enseñar geometría le permite al estudiante la oportunidad de visualizar e identificar otros problemas que se generan a partir de un problema propuesto; por ejemplo.

Los estudiantes pueden iniciar con la construcción de un segmento *AB* e indicar su punto medio *M* (ver Figura 1), pueden trazar la mediatriz n del segmento *AB* (la mediatriz *n* es la línea recta perpendicular al segmento *AB* que contiene su punto medio *M*).

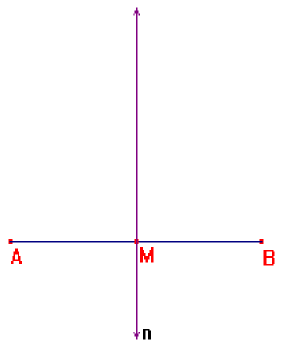

Figura 1. ***Mediatriz del segmento*** *AB*

Se ha iniciado con un trazo sencillo; considerando la construcción que se muestra en la figura 1 se logran identificar algunas ideas importantes como por ejemplo, la igualdad de los segmentos ***AM*** y ***MB*** y el valor de 90º para las medidas de los ángulos formados por ***n*** y el segmento ***AB***, idea que los estudiantes pueden reconocer y examinar a partir del empleo de distintos recursos matemáticos, como por ejemplo la medición de algunas partes de la configuración y la búsqueda de relaciones. En este orden de ideas los estudiantes con ayuda de Cabrí pueden considerar el triángulo que se forma al unir un punto ***C*** de la recta ***n*** con los puntos ***A*** y ***B***, respectivamente. Dado que ***C*** se puede mover a lo largo de ***n*** (ver Figura 2), los estudiantes pueden preguntarse acerca de las propiedades invariantes del Δ ***ABC*,** por ejemplo, ¿cuál es la relación entre las medidas de los segmentos ***AC*** y ***BC***? o ¿cómo se relacionan las medidas de los ángulos ***CAB*** y **CBA**?

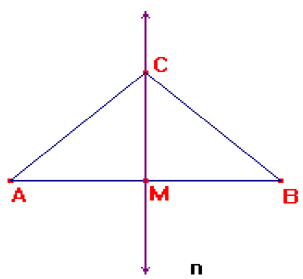

Figura 2. ***Triángulo Isósceles***

Al calcular las medidas de los lados y ángulos internos del triángulo ***ABC***, los estudiantes pueden identificar algunas propiedades invariantes de la construcción, por ejemplo, al medir los segmentos ***AC*** y ***BC*** y mover el punto ***C*** los estudiantes pueden *observar* que estas medidas son siempre iguales, o bien, al medir los ángulos ***CAB*** y ***CBA*** y mover el punto ***C*** pueden *percibir* que estos ángulos son congruentes; es decir, que el triángulo ***ABC*** es un triángulo isósceles (ver Figura 3). A partir de estos resultados, los estudiantes pueden plantear alguna conjetura que les permita llegar a un resultado importante.

PRIMERA CONJETURA: TRIÁNGULO ISÓSCELES

El triángulo ***ABC*** que se forma al unir los extremos del segmento ***AB*** con cualquier punto ***C*** localizado sobre la mediatriz de ***AB*** es un triángulo isósceles.

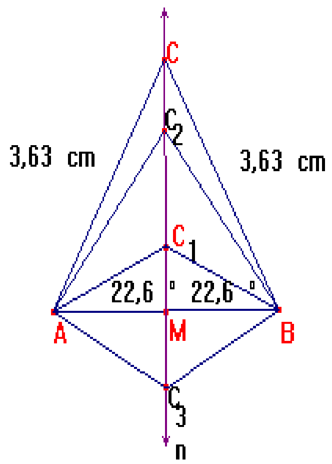

Figura 3. ***Triángulos isósceles en varias posiciones de*** *C*

Una vez que los estudiantes están convencidos de la valides de dicha conjetura (convencimiento obtenido por propiedades invariantes en las medidas calculadas), se pueden preguntar ¿porqué la conjetura es válida? (Furinghetti *et al*, 2003, p. 402); es decir, los alumnos pueden justificar la igualdad de los segmentos ***AC*** y ***BC*** utilizando argumentos *formales* que contemplen aspectos relacionados con congruencia de triángulos.

JUSTIFICACIÓN O PRUEBA DE LA CONJETURA

Considerando los triángulos ***AMC*** y ***BMC*** (ver Figura 4) los estudiantes pueden justificar la congruencia entre los lados ***AC*** y ***BC*** ya que, con base en dichos triángulos, se puede deducir que:

- Los segmentos ***MA*** y ***MB*** son de igual medida (***M*** es el punto medio de ***AB***),
- Las medidas de los ángulos ***AMC*** y ***BMC*** son de 90º (**n** es perpendicular al segmento ***AB*** por ser ***M*** el punto medio y,

- Ambos triángulos rectángulos comparten el cateto ***MC***

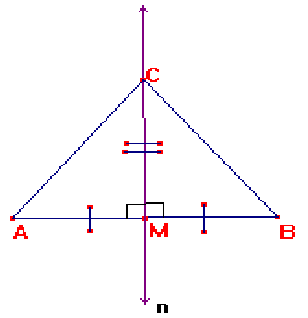

Figura 4. ***Triángulos rectángulos congruentes***

Por las tres consideraciones anteriores y utilizando el criterio de congruencia *lado-ángulo-lado* los estudiantes pueden concluir que $\Delta \mathbf{AMC} \cong \Delta \mathbf{BMC}$ y confirmar el resultado; es decir, los estudiantes pueden corroborar la igualdad de los lados ***AC*** y ***BC***

Es importante que los estudiantes no sólo identifiquen algunas relaciones que se presentan en la construcción sino que, además, presenten argumentos que las respalden. Las construcciones de dichos argumentos se pueden favorecer cuando los alumnos realizan las construcciones con *Sketchpad* o *Cabrí*, ya que en estas construcciones deben tener en cuenta las propiedades que están detrás de los trazos. Además, con la ayuda del *software* los alumnos pueden, fácilmente, asignar medidas a los segmentos o ángulos y observar sus respectivos comportamientos al mover en este caso, el punto ***C*** a lo largo de la recta **n.**

Así los alumnos exploran o examinan la construcción, asignan medidas (segmentos, ángulos), observan invariantes, plantean una conjetura y, eventualmente, formulan una demostración; en este caso, los alumnos pueden plantear la conjetura y, en algún momento, demostrar que el triángulo ***ABC*** es un triángulo isósceles para cualquier posición de ***C*** sobre **n.**

Considerando la misma construcción los alumnos pueden investigar otras relaciones o propiedades de las figuras.

SEGUNDO RESULTADO: TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Moviendo ***C*** los alumnos pueden observar que hay posiciones de dicho punto sobre la recta ***n*** para las que se cumple que el triángulo formado, además de ser triángulo isósceles, es un triángulo equilátero (tres lados congruentes), con base en las medidas calculadas, los alumnos pueden mover el punto ***C*** hasta que las medidas de los lados y de los ángulos sean iguales, respectivamente; así los alumnos pueden responder la pregunta ¿dónde ubicar el punto ***C*** para que el triángulo ***ABC*** sea un triángulo equilátero?

Al unir los extremos del segmento con cualquiera de los puntos de intersección. Entre la recta **n** y la circunferencia de centro ***B*** y radio ***BA***, se obtiene un triángulo equilátero (ver figura 5)

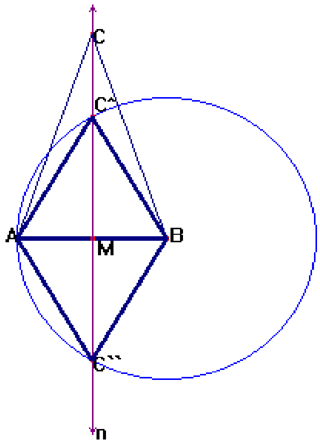

Figura 5. ***Triángulos equilátero***

.....Una vez más los alumnos pueden considerar el triángulo **ABC`** y estudiar los lugares geométricos cuando se traza la altura y la recta que pasa por el punto medio del segmento ***BC*** y construir el lugar geométrico cuando el punto de **P** de intersección se mueve (Figura 6)

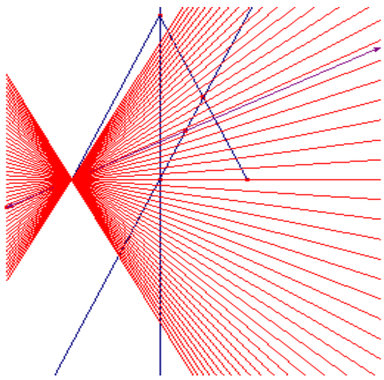

Figura 6. ***Lugar geométrico en triángulos rectángulos congruentes***

Los alumnos se pueden preguntar acerca de las propiedades o características de ***P*.** al mover ***C*** a lo largo de **n**, ***P*** describe un movimiento que puede ser el centro de atención de los alumnos. Una tarea interesante para los alumnos es la descripción de la trayectoria de ***P*** es probable que los alumnos mencionen que la trayectoria de ***P*** es en forma de parábola, o bien, que indiquen que dicha trayectoria describe parte de una hipérbola (Figura 7)

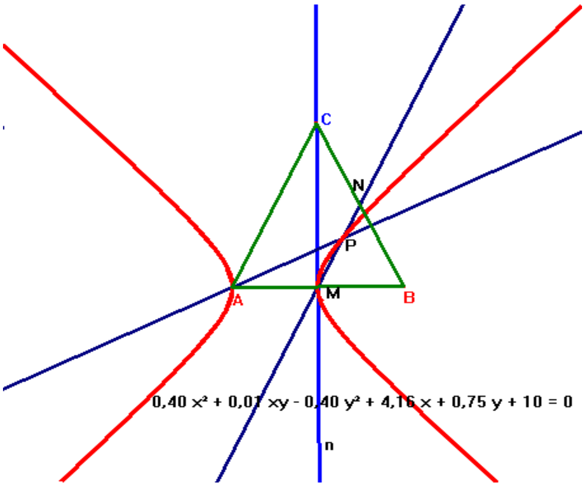

Figura 7. Lugar geométrico de **P** cuando **C** se mueve sobre ***n***

Aunque no necesariamente el lugar geométrico cuando se mueve P resulta ser una hipérbola, los alumnos pueden comprobar dicha conjetura generando una cónica con cinco puntos que pertenezcan al lugar geométrico de P y evidentemente los puntos coinciden con dicho lugar. Teniendo evidencia empírica de la validez de su conjetura, los alumnos pueden cuestionarse acerca de los elementos que están involucrados con dicha cónica.

En este sentido, los alumnos pueden investigar la posición de *(a)* los focos de esta hipérbola, *(b)* los ejes de simetría, *(c)* los vértices y *(d)* el centro de simetría (intersección de los dos centros de simetría).

¿Por qué se cree que pueden producirse cambios en la forma de enseñar y aprender matemáticas con el software dinámico, principalmente, con Cabrí?

La respuesta se fundamenta en los sistemas de representación que ofrecen estas tecnologías: dinámicas y con la posibilidad de establecer una mejor correspondencia entre el universo visual y el numérico (López, 2003, p. 6).

De igual forma se sugiere tomar en consideración las siguientes preguntas al momento de presentar sus resultados:

¿Qué tipo de procesos educativos se generaron con la metodología empleada?

La respuesta se fundamenta en los sistemas de representación que ofrecen estas tecnologías: dinámicas y con la posibilidad de establecer una mejor correspondencia entre el universo visual y el numérico (López, 2003, p. 6).

¿Qué tipo de relación pedagógica se generó entre docente y estudiantes?

Según Lizarazo (2005) la resolución de problemas ha sido identificada como un aspecto importante en Educación Matemática. En los últimos años, principalmente, se ha realizado investigación trascendental en este campo (Osawa, 2002; Polya, 1965; Santos, 1996, 1997,1998; Schoenfeld, 1985,1992).En relación con la resolución de problemas, el NCTM (2000) menciona que los problemas matemáticos "dan a los estudiantes la oportunidad de solidificar y ampliar sus conocimientos matemáticos [...] y pueden estimular el aprendizaje de la matemática en los alumnos y una mejor relación con el profesor" (p.51). esto se logró con los alumnos de primer semestre de la universidad que vieron por primera vez la asignatura mediante el uso de tecnología.

PREGUNTAS BASADAS EN EXPERIENCIAS PREVIAS

¿Cuáles fueron los efectos de la experiencia en el nivel de motivación, la actitud, los hábitos de estudio y el nivel de asimilación de los estudiantes?

Los estudiantes mostraron interés, responsabilidad y motivación por la asignatura, trabajaron sin ninguna presión por la nota, se lograron obtener trabajos sorprendentes más allá de lo que el programa exige.

¿Cuál fue el papel de los estudiantes en el desarrollo de la experiencia?

Una vez que adquirieron la orientación pertinente respecto uso del software, cada uno de los grupos asumió con responsabilidad su trabajo final, los cuales, fueron puestos a consideración en el aula de clase.

¿Qué cambios se presentaron a lo largo de la experiencia? ¿Qué problema o situación resolvió la innovación?

Ningún estudiante optó por cancelar la asignatura al final del semestre, por el contrario propusieron que esta forma de aprender geometría se generalice para todos los cursos, como innovación ya algunos trabajos de los alumnos fueron presentados en el III Congreso Iberoamericano de cabrí celebrado en Bogotá en la Universidad Jorge Tadeo Lozano.

¿Cuál fue el papel de los estudiantes en los cambios ocurridos?

Los estudiantes resolvían en su computadora cada una de las actividades programadas, y luego eran guardadas en su carpeta de trabajo para luego ser discutidas por el grupo de Investigación. Siempre estuvo atento mediante comunicación electrónica para cualquier sugerencia o duda que se diera al respecto.

¿Qué problema o situación resolvió la innovación?

Los estudiantes aprendieron a construir las figuras geométricas basados en las herramientas que les facilita el software y no a suponer con papel y lápiz "que esta figura es un cuadrado" "o que tal recta es paralela" o que el triangulo X es isósceles *et al*. Aceptar estas creencias en una demostración matemática, muchas veces lleva al estudiante a cometer errores de interpretación y mal uso de las definiciones y aplicación de los teoremas.

¿Cuáles fueron las principales dificultades surgidos en el desarrollo de la experiencia? ¿A qué se debieron estas dificultades?

La formulación de preguntas en la resolución de problemas, le permite al estudiante conectar el problema con otros problemas, y en este sentido generaliza la solución.

A continuación se presentan dos problemas que recogen las ideas anteriores:

¿QUÉ TAL SI NO SON CUADRADOS? LA ENSEÑANZA DE UNA EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS DESDE LA PERSPECTIVA DE LEV VIGOTSKI

Se sabe que el teorema de Pitágoras establece que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos del mismo triángulo. Generalizar este resultado para cualquier polígono regular, esto es, se probar el siguiente enunciado que puede ser interpretado como un corolario del Teorema de Pitágoras:

El área del polígono regular de n lados, cuyo lado es igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los dos polígonos regulares de igual número de lados, cuyos lados son los catetos del triángulo mencionado.

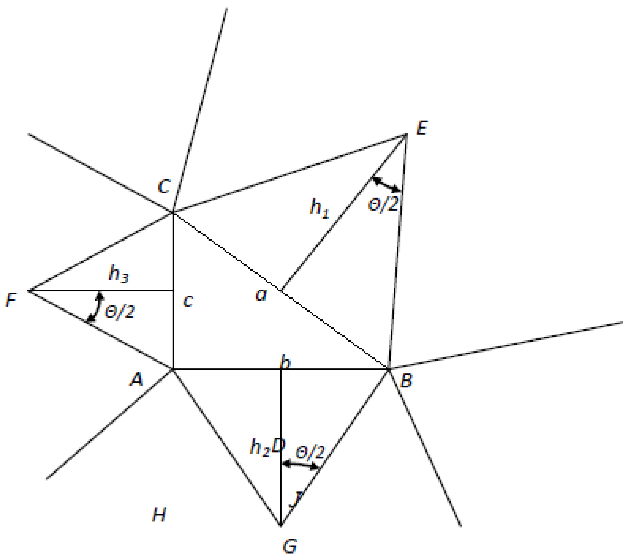

Figura auxiliar para la demostración

DEMOSTRACIÓN

En la figura se ha construido un triángulo rectángulo ABC, con catetos $AB = b$ y $AC = c$ y cuya hipotenusa es BC, la cual designaremos por h.

Supongamos que BC es el lado de un polígono regular de n lados, cuyo centro está en el punto E. El área A_1, de este polígono es equivalente a n veces la del triángulo isósceles CEB, es decir

$$A_1 = n\frac{1}{2}(BC)\times(DE) = \frac{n}{2}ah_1 \qquad (1)$$

Análogamente, las áreas de los polígonos regulares de *n* lados centrados en *G* y *F* y cuyos lados son los catetos *AB*=*b* y *AC*=*c*, son respectivamente *n* veces las áreas de los triángulos *BGA* y *AFC*, o sea,

$$A_2 = n\frac{1}{2}(AB)\times(JG) = \frac{n}{2}bh_2 \qquad (2)$$

$$A_3 = n\frac{1}{2}(AC)\times(HF) = \frac{n}{2}ch_3 \qquad (3)$$

Pero los triángulos *EDB, GJB y FHA* son semejantes y por consiguiente se verifican las siguientes igualdades:

$$\frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{b} = \frac{h_3}{c} \qquad (4)$$

de donde se obtienen las siguientes expresiones

$$h_2 = \frac{bh_1}{2a} \qquad (5)$$

$$h_3 = \frac{ch_1}{2a} \qquad (6)$$

Remplazando (5) y (6) en (2) y (3) respectivamente, resulta

$$A_2 = n\frac{b^2h_1}{2a} \qquad (7)$$

y

$$A_3 = n\frac{c^2h_1}{2a}. \qquad (8)$$

La suma de las áreas A_2 y A_3 se determina sumando miembro a miembro las ecuaciones (7) y (8) y el resultado es

$$A_2 + A_3 = n(b^2 + c^2)\frac{h_1}{2a} \qquad (9)$$

Según el teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

con lo cual podemos expresar la ecuación (9) así:

$$A_2 + A_3 = n\frac{a^2 h_1}{2a} = \frac{nah_1}{2}. \qquad (10)$$

De las ecuaciones (1) y (10) se sigue que

$$A_1 = A_2 + A_3.$$

lo cual justifica el objetivo propuesto.

A continuación se obtiene tres relaciones de importancia:

De las relaciones (1) y (4) tenemos:

$$A_1 = \frac{na^2 h_2}{2b} \qquad (11)$$

Usando la relación (2) en la (11) obtenemos:

$$A_1 = \frac{na^2 2A_2}{2bnb} = \frac{A_2 a^2}{b^2} \text{ de donde se deriva : } \frac{A_1}{A_2} = \frac{a^2}{b^2} \qquad (12)$$

Combinando (3) y (4) tenemos:

$$A_3 = \frac{nc^2 h_2}{2b} \qquad (13)$$

Combinando (11) y (13) tenemos:

$$A_1 = \frac{A_3 a^2}{c^2} \text{ de donde se sigue que: } \frac{A_1}{A_3} = \frac{a^2}{c^2} \qquad (14)$$

Por último combinando la relación (2) y (13) se tiene:

$$A_2 = \frac{b^2 A_3}{c^2} \qquad \text{de donde se sigue: que} \quad \frac{A_2}{A_3} = \frac{b^2}{c^2} \qquad (15)$$

Las relaciones (12), (14) y (15) establecen para el caso tratado, que las áreas de los polígonos son directamente proporción.

BIBLIOGRAFIA

Amold, K.; Gosling, L. (1998). *The Java Programming Language (Segunda ed.)*. USA: Addison-Wesley.

Arcavi, A.; Hadas, N. (2000). *Computer Mediated Learning: An Example of An Approach*. International Journal oJ ComputeN (págs. 25-45). Mathematical Learning.

Balacheff, N.; Kaput, J. (1996). *Computer-Based Learning Environments in Mathematics.* En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde, International Handbook of Mathematics Education (págs. 469-501). Netherlands: Kluwer Academic Pub.

Battista, M.; Clements, D. (1995). *GeOIJ and Prof*. The Mathematics Teacher (88)

Baylor, A.; Ritchie, D. (2002). What Factors Facilitate Teacher Skill, Teacher Morale, and Perceived Student Leaming in Technology-Using Classrooms? Computers & Education (39), 395-414.

Furinghetti, F.; Paola, D. (2003). *To Produce Conjectures and to Prove them Within a Dynamic Geometry Environment: a Case Study.* En N. Pateman, B. Dougherty y L. Zilliox (Eds.), proceedings of the 27th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Vol. 2, pp. 397-404. Honolulu, HI, USA: Center for Research and Development Group, University of Hawaii.

Godino, J.; Recio, A. (2001). Significados Institucionales de la Demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. Enseñanza de las Ciencias, 19(3),405-414.

Guin, D.; Trouche, L. (1999). *The Complex Process of Converting Tools loto Mathematical Instruments: The Case of Calculators*. International Journal of Computers Jor Mathematical Learning, 3, 195-227.

Guzmán, J.; Hitt, F.; Santos, M. (2002). *El Currículo de Matemáticas en México en la Escuela Media.* En A. Maz, M. Torralbo y C. Abraira (Eds.), Currículo y Matemáticas en la Enseñanza Secundaria en lberoamérica, pp. 111-131. Córdoba, México: Universidad de Córdoba.

Hanna, G. (1995). *Challenges to the Importance of Proof.* For the Learning of Mathematics An International Journal of mathematics, 15(3),42-49.

Hanna, G. (1998). *Proof as Explanation in Geometry*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20(2),4-13.

Hitt, F. (1996). *Educación Matemática y Uso de Herramientas tecnológicas*. En M. Santos y E. Sánchez (Eds.), Perspectivas en Educación Matemática, pp. 21-44. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kaput, J. (1992). *Technology and Mathematics Education*. En D. Grows (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 515-556. New York, USA: Macmillan.

Lagrange, J. (1999). Complex Calculators in the Classroom: Theoretical and Practical Reflections on Teaching Pre-Calculus. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4,51-81.

Mann, D. (2002). El Rol de la Tecnología en la Reforma Educativa: de la Escuela a la Educación y de la Enseñanza al Aprendizaje. EDUFORUM.

Meza, L. (2001). Estrategias Didácticas para Desarrollar Procesos de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática Asistidos por Computadora. Instituto Tecnológico de Costa Rica.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standard for School Mathematics.* Reston, V A, USA: National Council of Teacher of Mathematics.

O'Brien, S. (1991). *Turbo Pascal 6: The Complete Reference.* Berkeley, CA, USA: Osborne/McGraw-Hill.

Osawa, H. (2002). *Mathematics of a Relay - Problem Solving the Real Word.* Teaching Mathematics and its Applications. 21(2),85-93.

Pence, B. (1999). *Proof Schemes Developed by Prospective Elementary School Teachers Enrolled in Intuitive Geometry*. En F. 1-Jitt Y M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 429-435. Morelos, México: Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Perkins, D.; Simmons, R. (1988). Patterns of Misunderstanding: An Integrative Model for Science, Math, and Programming. Review of Educational Research, 58(3), 303-326.

Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Reimpresión 2002, México: Trillas.

Recio, A. (2001). *La Demostración en Matemática. Una Aproximación Epistemológica y Didáctica.* En M. Moreno, F. Gil, M: Socas y J. Godino (Eds.), Memorias V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 27-44. Almería; España.

Richard, P. (2001). *Aspectos Relevantes para el Aprendizaje de la Demostración en Geometría.* En M. Moreno, F. Gil, M. Sacas y J. Godino (Eds.), Memorias V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 45-58. Almería, España.

Sáenz, C. (2001). *Sobre Conjeturas y Demostraciones en la Enseñanza de las Matemáticas.* En M. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. Godino (Eds.), Memorias V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 59-79. Almería, España.

Sánchez, E.; Mercado, M. (2001). *Formulación de Conjeturas en Actividades con Cabri Géometre*. En C. Cortés, F. Hitt, A. Sepúlveda y L. Guerrero (Eds.), Memorias Conferencia Internacional Sobre Uso de Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas y Noveno Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, pp. 157-164. Morelia, Michoacan, México: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Santos, M. (1996). An Exploration of Strategies Used by Students to Solve Problems with Multiple Ways of Solution. Journal of Mathematical Behaviour, 15, 263-284.

Santos, M. (1997). Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Segunda Edición, México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Santos, M. (1998). On the Implementation ol' Mathematical Problem Solving Instruction: Qualities of Some Learning Activities. CBMS lssues in Mathematics Education, 7, 71-80.

Santos, M. (2001). Potencial Didáctico del Software Dinámico en el Aprendizaje de las Matemáticas. Avance y Perspectiva, 20,247-258.

Santos, M. (2004). Exploring the Triangle Inequalify and Conic Sections Using Interactive Software for Geometry. The Mathematics Teacher, 97(1), 68-72.

Santos, M.; Agüero, E.; Borbón, A.; Páez, C. (2003). *Students Use of Technology in Mathematical Problem Solving: Transforming Technological Artefacts into Mathematical Tools.* En N. Pateman, B. Dougherty y 1. Zilliox (Eds.), Proceedings 01 the 27th Conference 0f the international Group for the Psychology ol Mathematics Education held jointly with the 25th Conference 0f PME-NA, Vol. 4, pp. 119-126.

Honolulu, HI, USA: Center for Research and Development Group, University of Hawaii.

Santos, M.; Díaz-Barriga, E. (1999). Validación y Exploración de Métodos de Solución a Problemas Propuestos a través del Uso de la Tecnología. Educación Matemática, 11(2), 90-10l.

Santos, M.; Espinosa, H. (2002). *Searching and Exploring Properties of Geometric Configurations Using Dynamic Software*. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 33(1),37-50.

Santos, M.; Moreno, L. (2001). Proceso de Transformación del Uso de Tecnología en Herramientas para Solucionar Problemas de Matemáticas por los Estudiantes. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Herramientas Tecnológicas en el Aula de A1atemáticas. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. San Diego, CA, USA: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics.* En D. Grows (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 334370. New York, USA: Macmillan.

Stewart, I. (1990). *Change.* En L. Steen (Ed.), On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy, pp. 183-217. Washington, DC, USA: National Academy Press.

De Villiers, M. (1999). *The Role and Function of Proof with Sketchpad*. En M. de Villiers (Ed.), Rethinking Proof with The Geometer 's Sketchpad, pp. 3-10. Emeryville, CA, USA: Key Curriculum Press.

Watt, D. (1985). *Learning with Commodore Logo*. New York, USA: McGraw-Hill.

Wolfram, S. (1996). *The Mathematica Book*. Tercera Edición. Cambridge, England: Cambridge University Press.