

---

## CONSTRUCCIÓN DINÁMICA DE LOS FRACTALES CLÁSICOS DE SIERPINSKI POR SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES

(1) Claudia P. Orjuela O. – (2) Carlos R. Pérez M. – (3) Clara E. Rojas M.

(1) [cporjuela@pedagogica.edu.co](mailto:cporjuela@pedagogica.edu.co) – (2) [mathperez@gmail.com](mailto:mathperez@gmail.com) – (3)

[clara.rojas@uptc.edu.co](mailto:clara.rojas@uptc.edu.co)

Universidad Pedagógica Nacional. Colombia (1) (2)

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (3)

---

### RESUMEN

*Se presenta una propuesta de actividades, que acorde a las políticas curriculares colombianas actuales que establecen los Estándares de Matemáticas, busca introducir los fractales al currículo colombiano de Geometría del nivel de la básica en los cursos quinto de primaria, sexto y séptimo de bachillerato, como un nuevo concepto de las Matemáticas Escolares que permite integrar las temáticas de construcciones geométricas de polígonos regulares con regla y compás y transformaciones en el plano euclideo en el entorno computacional Cabri II Plus. Se quiere mostrar que el incorporar los fractales en el aula desde la primaria, y mejor aún con el apoyo de software de geometría dinámica como lo es Cabri, enriquece los cursos habituales de matemáticas en ese nivel. Es importante resaltar que el trabajo se enmarca en el ámbito de la Geometría Fractal, la cual es hoy en día un área reciente de investigación en Matemáticas, ampliado además, con la utilización del software de matemáticas como una potente herramienta para la enseñanza, aprendizaje e investigación en Educación Matemática.*

### CONTEXTO CURRICULAR DE LA PROPUESTA

#### ESTÁNDARES CURRICULARES

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia junto con la Asociación Colombiana de Facultades de Educación, respondiendo a las políticas del plan de gobierno actual en el marco del proyecto de la Revolución Educativa en el programa correspondiente al mejoramiento de la calidad de la educación, ha formulado desde el año 2003 los *Estándares Básicos*, que procuran por desarrollar en los niños no sólo habilidades comunicativas, matemáticas y científicas, sino también, desarrollar competencias ciudadanas.

Particularmente para el área de Matemáticas, la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática de los niños, niñas y jóvenes y sobre la manera como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual, así se han formulado los ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS. *Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!*, estableciendo el currículo de Matemáticas para las instituciones de Educación primaria (1° a 5°), básica secundaria (6° a 9°) y media (10° y 11°), y que asumen lo que significa ser *matemáticamente competente* a partir de algunos procesos generales presentes en toda la actividad matemática como formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas; utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración; dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

La noción de *ser matemáticamente competente* se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. En lo correspondiente al tema central de este proyecto, la construcción geométrica de polígonos regulares y los Movimientos Rígidos en el plano euclideo para la construcción de Fractales Clásicos, compromete de manera precisa el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, que se entiende de manera general como “... *el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales*”.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas seleccionan algunos de los niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento matemático. Por ello organizan lo que corresponde a cada uno de dichos tipos de pensamiento y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él,

aunque muchos de esos estándares se refieran también a otros tipos de pensamiento y a otros sistemas. En forma semejante, cada estándar de cada pensamiento pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática que cruzan dichos tipos de pensamiento (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, formular, ejercitar procedimientos y algoritmos), pero suele referirse también a otros procesos generales que pueden practicarse en distintos contextos para contribuir a superar el nivel seleccionado como estándar.

Los estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados, primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo para dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar y para apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo que estimulen a los estudiantes a superar a lo largo de dichos grados los niveles de competencia respectivos y, en lo posible, a ir mucho más allá de lo especificado en los estándares de ese conjunto de grados. El conjunto de estándares debe entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo.

Para el desarrollo de este proyecto se tendrán en cuenta algunos estándares relacionados con el pensamiento espacial y sistemas geométricos propuestos para los grados cuarto y quinto. Los estándares son:

- Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
- Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.
- Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.
- Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
- Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.

## LOS FRACTALES UNA FORMA DIFERENTE DE HACER GEOMETRÍA

Los fractales, considerados como nuevo concepto dentro del currículo de la escuela, suministran modelos que contribuyen a percibir el espacio y las propiedades geométricas de objetos y procesos naturales, además de contemplar la existencia de una conexión entre éstos y algunos de los objetivos educativos establecidos para las etapas de la Primaria y la Secundaria, y así romper con la creencia común de que las matemáticas son un área ya acabada al introducirlos como conocimientos formulados de manera reciente.

Los fractales como recurso metodológico en el aula de Matemáticas permiten hablar de geometría desde una perspectiva moderna, ya que su proceso de construcción permite desarrollar procesos de inferencia, el estudio de las semejanzas y por consiguiente los movimientos y las homotecias en el plano, mediante el conocimiento de las propiedades básicas de los fractales para utilizarlos en el trabajo matemático.

La inclusión de la Geometría Fractal en el currículo es justificada en primer lugar, por la necesidad de actualizar los conocimientos matemáticos permitiendo que se cuestionen los currículos tradicionales fragmentados donde las disciplinas científicas parecen compartir muy pocas ideas importantes (Turégano, 1997), y en segundo lugar, porque el uso de gráficos interactivos usados para el trabajo en el campo de los fractales, puede ayudar a desarrollar y utilizar modos alternativos de razonamiento basados fundamentalmente en argumentos visuales y cualitativos (Figueiras, 2000).

Hoy en día, es bastante común el uso de las nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas como soporte didáctico, que ofrece posibilidades de mejorar el aprendizaje de los estudiantes, las cuales se hacen cada vez mayores cuando se toman los fractales como recurso para trabajar aquellos contenidos con los que estén involucrados, potenciando en el estudiante las actitudes de búsqueda e investigación enfocando el trabajo matemático básicamente como una labor de éstas, para profundizar, entre otros, en el concepto de recursividad.

Se encuentran en la literatura de revistas de Educación Matemática, como SUMA, Epsilon y The Mathematics Teacher, distintas propuestas para el tratamiento didáctico de los temas de las transformaciones geométricas en el plano y la construcción

de fractales, entre otros como patrones numéricos y geométricos [3] [12] [13] [16], el juego del caos [1] [4] [11], dimensión fractal [14], sistemas dinámicos discretos [15], semejanza [17], perímetro, área [18] y composición de funciones [5].

Entre las propuestas que se encuentran en SUMA están: “*Movimientos en el plano y mosaicos*” de Juan Montero [1991], en la que propone que la introducción de las transformaciones del plano se haga de forma práctica, es decir, a través del movimiento de las figuras sobre el papel posibilitando que las obtenidas finalmente, propicien el desarrollo de muchos contenidos geométricos y algebraicos del currículo de secundaria; como también propuestas que además relacionan la construcción de fractales; “*Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales*” de Juan Moreno [2002], en la cual propone también reforzar la introducción a la Geometría utilizando las transformaciones lineales afines en el plano para definir y construir formas fractales. Otros artículos que también se encuentran en SUMA, exponen propuestas metodológicas y experiencias didácticas, en las que se propone la incorporación de la calculadora gráfica para el estudio de los fractales y el juego del caos, así como su incorporación al currículo [4], [11], [16], [21].

Otro tipo de propuestas, que se encuentran en Epsilon, son como la de Pilar Turégano [1997], que aseguran que estudiar las transformaciones geométricas, isometrías y semejanzas, resolver problemas por el método analítico y el método gráfico, o interpretar representaciones y deducir relaciones geométricas de las mismas, son algunos de los objetivos posibles con este trabajo.

Todo el trabajo anterior, posibilita el estudio y fortalecimiento de varios conceptos de las Matemáticas de la secundaria que son habituales, como la iteración, las transformaciones geométricas lineales y las no-lineales, la semejanza y la homotecia, la convergencia y el límite, el determinismo y el azar, mostrando que existen interesantes interconexiones entre diferentes ideas matemáticas revelando al mismo tiempo que no son aislados. Por otro lado, el acercamiento a la Geometría Fractal puede hacerse a través de dos vías igualmente enriquecedoras en el trabajo en el aula, la primera es por medio de actividades exploratorias en las que juegan un papel importante los computadores o las calculadoras gráficas en las que se privilegia el estudio analítico del objeto fractal llevando a la formulación de modelos matemáticos o geométricos; la

segunda vía, es el trabajo manipulativo con lápiz y papel, por medio de actividades de construcción y estudio de curvas fractales privilegiando aquí el establecer relaciones, como por ejemplo entre áreas y perímetros, así como el desarrollo de habilidades de conteo y generalización, entre otras, enfatizando en los procesos de recursión.

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Los conocimientos previos de los estudiantes en relación con el tema “la construcción geométrica de polígonos regulares y los Movimientos Rígidos en el plano euclideo para la construcción de Fractales Clásicos” son principalmente geométricos, distribuidos así:

Concepto Central	Conceptos Relacionados
Conceptos primitivos de la Geometría Euclidiana	Punto; Recta. Rectas paralelas y perpendiculares; Segmento; Notación de rectas y segmentos
Circunferencia	Centro y Radio
Polígonos regulares	Lados congruentes; Triángulo equilátero; Cuadrado; Construcción geométrica con regla y compás
Transformaciones en el plano	Movimientos. Traslación. Vector; Homotecia. Factor de homotecia

### DISTRIBUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Se llevarán a cabo siete actividades, mediante las tres primeras, a las que se asignan seis horas, se hará un acercamiento sobre el papel y lápiz a los objetos geométricos usados, las construcciones geométricas con regla y compás y la notación geométrica; para las siguientes cuatro actividades, a las que se asignan 12 horas, se usará el computador para llevar al ambiente Cabri los procedimientos estudiados con regla y compás, y llegar a la construcción de los fractales clásicos de Sierpinski usando la herramienta **Macro**. Las actividades y su asignación en horas clase son:

No.	ACTIVIDAD	TIEMPO
1	Construcciones con regla y compás	2 hs
2	Construcción de polígonos regulares	2 hs
3	Las transformaciones de traslación y homotecia	2 hs
4	El software de geometría Cabri Geometry II Plus	4 hs
5	Transformando figuras con Cabri Geometry II Plus	2 hs
6	Una nueva y útil herramienta: Macro	4 hs
7	¿Conociendo nuevas figuras autosemejantes?	2 hs

Las guías de trabajo que se les presentarán a los alumnos son en total 7, de las cuales las correspondientes a las actividades 4 y 6 están divididas en dos partes. Se preparan cinco archivos de construcciones en cabri que se les presentarán a los alumnos, que corresponden a la construcción del cuadrado, la traslación y la homotecia aplicada al cuadrado, y la construcción con las macro del Triángulo y la Carpeta de Sierpinski.

Para las 3 primeras actividades, los materiales necesarios para uso de los estudiantes son 2 hojas de block blancas tamaño carta, regla, compás, lápiz y cuaderno de apuntes, y para uso del profesor son compás, regla y marcadores para tablero; y en las demás actividades será necesario un computador con software Cabri II Plus por estudiante y cuaderno de apuntes, y para el profesor un Video Beam, marcadores para tablero y tablero acrílico.

## OBJETIVOS

### General

Introducir los fractales al currículo de Geometría de los grados quinto de primaria, sexto y séptimo de bachillerato, como un nuevo concepto de las Matemáticas Escolares que permite integrar las temáticas de construcciones geométricas de polígonos regulares con regla y compás y las transformaciones geométricas de traslación y homotecia en el plano euclideo, en el entorno computacional Cabri II plus.

### Conceptuales

- Estudiar las relaciones de perpendicularidad y paralelismo entre dos rectas.
- Estudiar los polígonos regulares a partir de las características que se privilegian por su construcción geométrica con regla y compás.

- Conocer las transformaciones en el plano de traslación y homotecia, y caracterizarlas según los elementos que las determinan.
- Reconocer la propiedad de autosemejanza de los fractales geométricos clásicos: Triángulo y Carpeta de Sierpinski.
- Construir la noción de fractal geométrico clásico a partir de la construcción del Triángulo y la Carpeta de Sierpinski.
- Caracterizar a través de la herramienta **Macro** del software Cabri II plus el método algorítmico de construcción de fractales geométricos por eliminación de área.

### Específicos de cada actividad

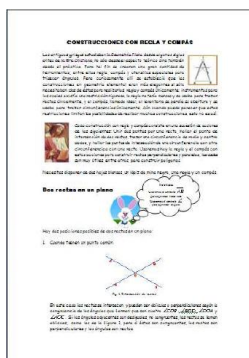
Los objetivos específicos de cada actividad, junto con los conceptos matemáticos, los logros de aprendizaje, los estándares, los recursos y los tiempos relacionados en cada una, se explicitan en la tabla siguiente.

ACTIVIDAD	OBJETIVO	ESTÁNDAR	CONCEPTOS MATEMÁTICOS	LOGROS DE APRENDIZAJE
<b>1. Construcciones con regla y compás</b>	Usar la regla y el compás para construir rectas perpendiculares y paralelas.	Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.	Rectas paralelas y perpendiculares.	Construye una recta perpendicular y una paralela a una recta cualquiera dada.
<b>2. Construcción de polígonos regulares</b>	Construir los polígonos regulares triángulo equilátero y cuadrado, usando la regla y el compás atendiendo a sus características.	Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.	Polígonos regulares: Triángulo rectángulo y Cuadrado.	Reconoce los polígonos regulares como figuras planas.
<b>3. Las transformaciones de traslación y homotecia</b>	-Conocer qué son las transformaciones en el plano. -Aplicar al triángulo equilátero y al cuadrado las transformaciones de traslación y homotecia.	Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.	Transformaciones en el plano: Traslación y Homotecia.	Construye objetos geométricos en el plano y les aplica movimientos rígidos.
<b>4. El software de geometría Cabri Geometry II Plus</b>	-Conocer el ambiente del software de Geometría Cabri Geometry II Plus. -Construir el triángulo equilátero y el cuadrado usando las	Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.	Polígonos regulares: Triángulo rectángulo y Cuadrado.	Reconoce los polígonos regulares como figuras planas.

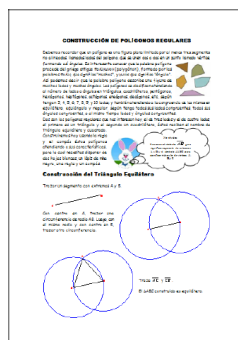


	herramientas de construcción de Cabri Geometry II Plus.			
<b>5. Transformando figuras con Cabri Geometry II Plus</b>	Usar las herramientas <b>Traslación</b> y <b>Homotecia</b> , del menú Transformar de Cabri, para aplicarlas a un triángulo equilátero y un cuadrado.	Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.	Transformaciones en el plano: Traslación y Homotecia.	Aplica movimientos rígidos en el plano como traslaciones, rotaciones y reflexiones, identifica las propiedades que se conservan en cada movimiento y visualiza transformaciones simples para descubrir reglas de combinación que permitan patrones.
<b>6. Una nueva y útil herramienta: Macro</b>	-Conocer la herramienta Macro de Cabri -Definir una macro para la construcción del fractal Triángulo de Sierpinski. -Definir una macro para la construcción del fractal Carpeta de Sierpinski.	Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.	Polígonos regulares: Triángulo rectángulo y Cuadrado. Transformaciones en el plano: Traslación y Homotecia.	Identifica el área que ocupan los polígonos regulares. Aplica movimientos rígidos en el plano como traslaciones, rotaciones y reflexiones, identifica las propiedades que se conservan en cada movimiento y visualiza transformaciones simples para descubrir reglas de combinación que permitan patrones.
<b>7. ¿Conociendo nuevas figuras autosemejantes?</b>	-Determinar qué es un fractal. -Deducir el método de construcción de fractales geométricos por eliminación de área. -Reconocer la propiedad de autosemejanza de los fractales Triángulo y Carpeta de Sierpinski. -Proponer nuevos métodos para la construcción de nuevas estructuras fractales.	Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.	Propiedad de autosemejanza de figuras. Patrones geométricos y numéricos.	Conoce y aplicar transformaciones rígidas en el plano y homotecias para la construcción de fractales. Propone algoritmos para la construcción de fractales.

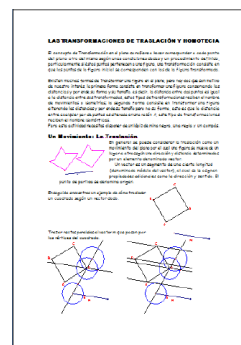
A continuación se incluyen las imágenes de las portadas de cada actividad:



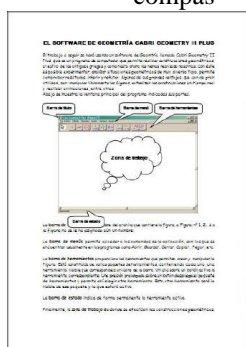
Construcciones con regla y compás



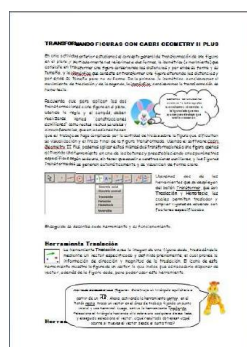
Construcción de polígonos regulares



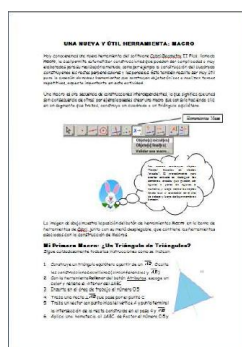
Las transformaciones de Traslación y Homotecia



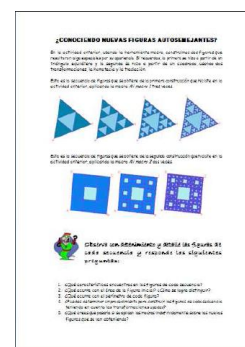
El software de Geometría Cabri II Plus



Transformando figuras con Cabri II Plus



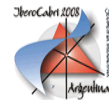
Una nueva y útil herramienta: Macro



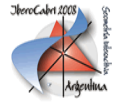
¿Conociendo figuras autosemejantes?

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Bedford, C.** (1998). *The Case for Chaos*. The Mathematics Teacher , 91 (4), 276-281.
- [2] **Cardona Valencia, A.** *Geometría*. Medellín, Colombia: Editorial Bedout S.A.
- [3] **Figueiras, L. M.** (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. SUMA (35), 45-54.
- [4] **Gallardo, J.** (1995). Fractales y azar: Un acercamiento mediante la calculadora gráfica. SUMA (20), 69-72.
- [5] **Hansen, W.** (1993). *An Attractive View of Composite Functions*. The Mathematics Teacher , 86 (5), 415-417.
- [6] **Landaverde, F.** (1963). *Curso de Geometría*. México: Editorial Progreso.



- [7] **Ministerio de Educación Nacional.** (1996). Obtenido de [http://menweb.minedu.gov.co:8080/saber/estandares\\_matematicas.pdf](http://menweb.minedu.gov.co:8080/saber/estandares_matematicas.pdf)
- [8] **Ministerio de Educación Nacional.** (1998). *Matemáticas Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- [9] **Montero, J.** (1991). *Movimientos en el plano y mosaicos*. SUMA (9), 53-57.
- [10] **Moreno-Marin, J. C.** (2002). Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales. SUMA (40), 91-104.
- [11] **Moreno-Marin, J. C.** (2002). El juego del caos en la calculadora gráfica: construcción de fractales. SUMA (41), 69-79.
- [12] **Moskowitz, S.** (1994). *Investigating Circles and Spirals With a Graphing Calculator*. Revista The Mathematics Teacher , 87 (4), 240-243.
- [13] **Queralt, T.** (1997). *Fractales en la ESO*. SUMA (24), 81-88.
- [14] **Redondo, A.; Haro, M.** (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (I). SUMA (47), 19-28.
- [15] **Redondo, A.; Haro, M.** (2005). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (II). SUMA (48), 15-21.
- [16] **Rodríguez, J.** (2004). Un álgebra computacional para generar patrones geométricos. SUMA (46), 45-50.
- [17] **Sandefur, J.** (1994). *Using Similarity to Find Length and Area*. The Mathematics Teacher , 87 (5), 319-325.
- [18] **Simmt, E.; Davis, B.** (1998). *Fractals Cards: A Space for Exploration in Geometry and Discrete Mathematics*. The Mathematics Teacher , 91 (2), 102-108.
- [19] **Texas Instrument.** (1997). *Cabri Geometry II, Manual para Macintosh ®, Windows ® y MS-DOS ®*. Obtenido de <http://www.cs.us.es/cursos/rc/manual-cabri-II.pdf>



[20] **Turégano, P.** (1997). Hacer matemáticas mediante la geometría de fractales. Epsilon (39), 169-192.

[21] **Valenzuela, J.** (2001). Geometría fractal con Derive. Tratamiento de imágenes. Epsilon (51), 419-424.