CONSTRUCCIÓN DE UN MECANISMO VIRTUAL PARA LA GENERACIÓN DE CURVAS MECÁNICAS

Benjamín R. Sarmiento Lugo

bsarmiento@pedagogica.edu.co

Universidad Pedagógica Nacional. COLOMBIA

RESUMEN

En este cursillo se pretende mostrar a los asistentes como construir algunas curvas mecánicas usando la vía tradicional de mover una circunferencia de radio r al interior o exterior de una circunferencia de radio R, y cómo obtener la misma curva como una simetría oculta generada por un vector w que es la suma de dos vectores u y v cuyos movimientos dependen de una relación de sus velocidades angulares. Finalmente se parametrizan las simetrías obtenidas y así justificar porqué funciona esta forma de construir algunas famosas curvas. Con esto se muestra una vez más la importancia del software de geometría dinámica para llegar a nuevos métodos para construir ciertos objetos matemáticos gracias a un trabajo de exploración.

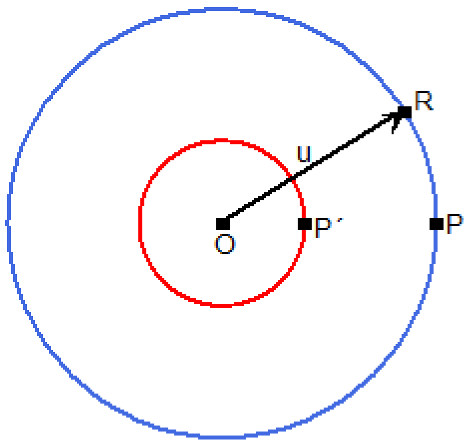
INTRODUCCIÓN

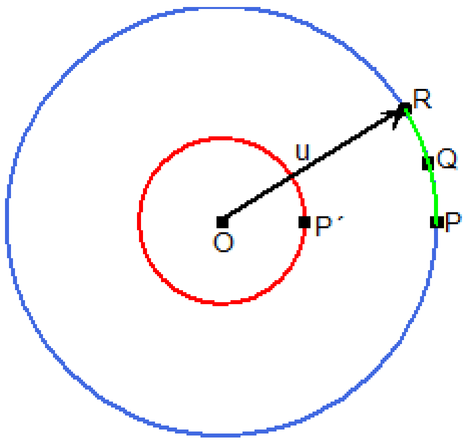
El uso de ambientes virtuales o computacionales para el aprendizaje de la matemática gana cada día un buen número de seguidores. Algunos docentes se privan de aprovechar estas nuevas herramientas por el temor de tener que invertir mucho tiempo y grandes esfuerzos en el aprendizaje de temáticas relacionadas con la informática, los que deciden a incursionar en estas nuevas formas de representar el conocimiento a sus estudiantes terminan concluyendo que el quehacer del docente con ayuda herramientas computacionales requiere mucho tiempo, no para el aprendizaje de temáticas informáticas, sino para idearse las actividades dinámicas que ayuden a la comprensión de los conceptos matemáticos y para encontrar nuevas maneras de construir los objetos.

A lo largo de esta conferencia los docentes verán que realmente no se requieren conocimientos avanzados de programación, solo disposición y ganas de explorar los alcances de las construcciones de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos hechos con algún software de geometría dinámica.

CONSTRUCCIÓN DE UN MECANISMO GENERADOR DE CURVAS

La intención en esta parte es construir un mecanismo manipulable que permita trazar un gran número de curvas mecánicas, a partir del punto final un vector w que resulta de sumar dos vectores u y v. El vector w será el trazador de curvas, los vectores u y v tendrán magnitudes que podremos variar y se podrán girar a diferentes velocidades en el mismo sentido o en sentidos contrarios. Para modificar las magnitudes de los vectores u y v se construirán dos controles numéricos que a su vez representarán los radios de dos circunferencias concéntricas en las cuales reposarán los puntos finales de los vectores u y v.





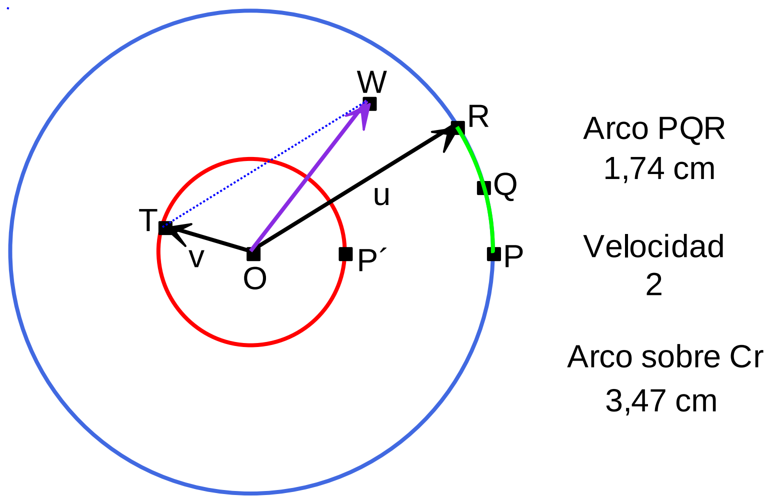
Inicialmente construimos dos controles numéricos que llamaremos Radio 1 y Radio 2. Esto lo hacemos con la herramienta Número.

Trazamos dos circunferencias concéntricas de radios R y r, (Radio 1 y Radio 2, respectivamente). Marcamos un punto fijo P y un punto móvil R sobre la circunferencia C_R y trazamos el vector OR (vector u).

Ahora trazamos el arco PQR y lo medimos. La medida de este arco nos servirá para controlar la velocidad con que se va mover el vector v.

Para modificar la velocidad del vector v, se construye un control numérico que llamaremos velocidad. Con la herramienta Calculadora multiplicamos la medida del arco PQR por el valor del control Velocidad y esa nueva medida se transfiere a la circunferencia Cr tomando como punto de partida a P´. Cuando este número (Control velocidad) es positivo el vector v se moverá en el mismo sentido del vector u, y cuando es negativo se moverá en sentido contrario.

El arco con la nueva medida, trazado sobre Cr, terminará en el punto T, el cual será el punto final del vector OT (vector v). Ahora trazamos el vector OT (vector v).



Se traza el vector suma OW (vector w = u + v). El rastro o lugar geométrico generado por el punto W a medida que se mueve el punto R será una curva mecánica.

De la misma manera como se diseñó este mecanismo usando dos vectores, se pueden diseñar otros mecanismos usando tres o más vectores y operaciones entre ellos.

EJEMPLOS DE CURVAS GENERADAS

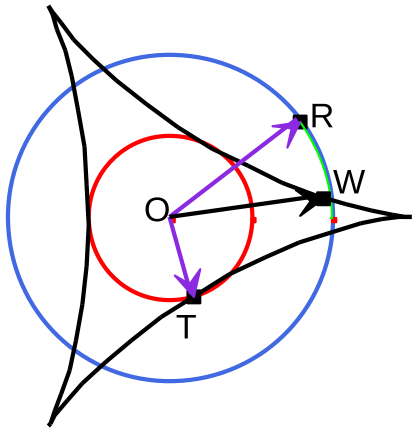
A continuación se darán algunos ejemplos de lugares geométricos ampliamente conocidos obtenidos con el mecanismo expuesto, cambiando los valores de los tres controles construidos.

Tricúspide o Deltoide:

Radio 1 = 2

Radio 2 = 1

Velocidad = -1

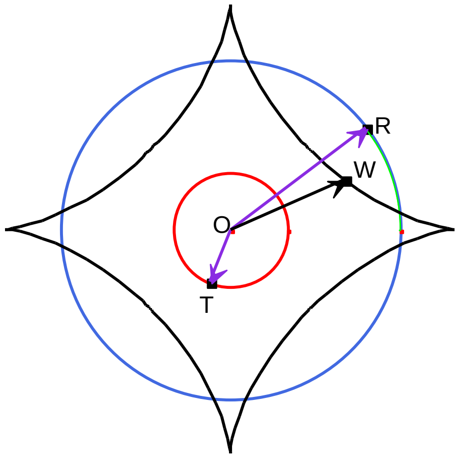


Astroide

Radio 1 = 3

Radio 2 = 1

Velocidad = -1

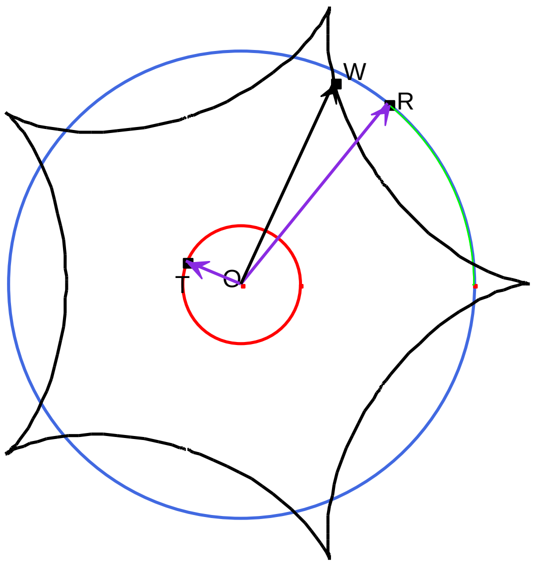


Hipocicloide de 5 cúspides:

Radio 1 = 4

Radio 2 = 1

Velocidad = -1

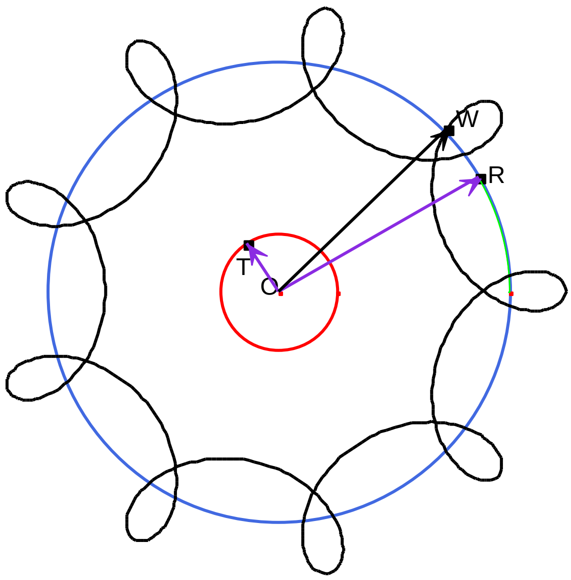


Trocoide

Radio 1 = 4

Radio 2 = 1

Velocidad = -2

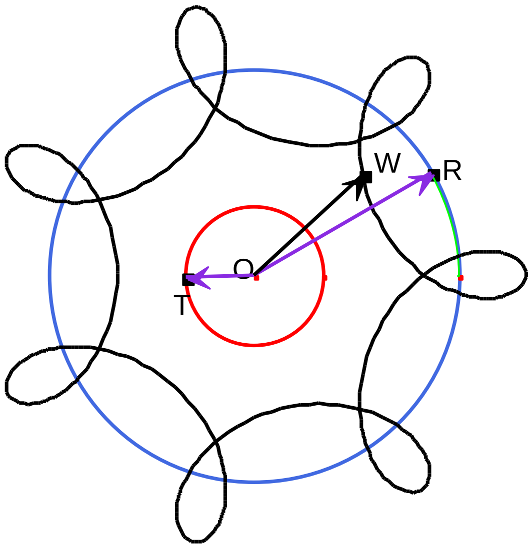


Trocoide

Radio 1 = 3

Radio 2 = 1

Velocidad = -2

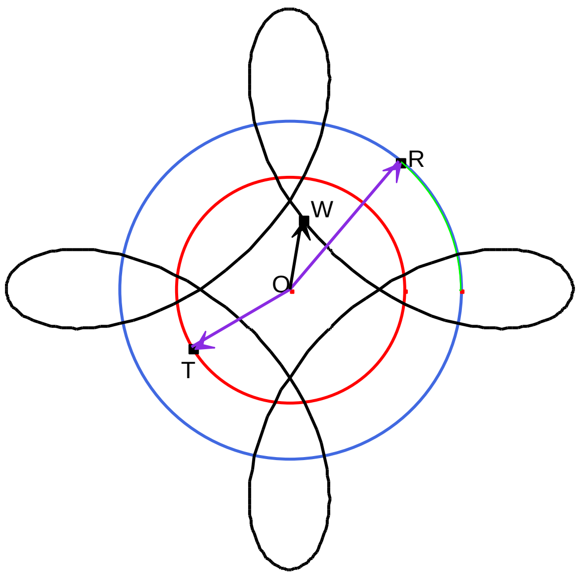


Trocoide

Radio 1 = 3

Radio 2 = 2

Velocidad = -2

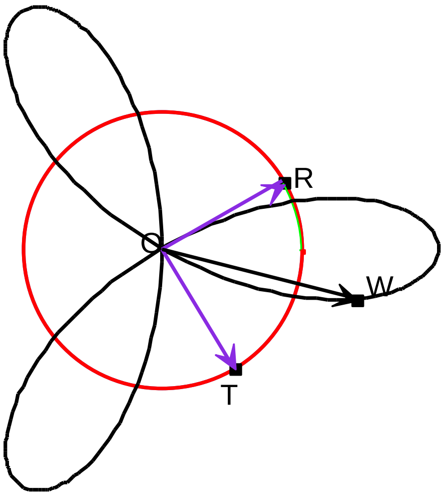


Trifolium

Radio 1 = 2

Radio 2 = 2

Velocidad = -2



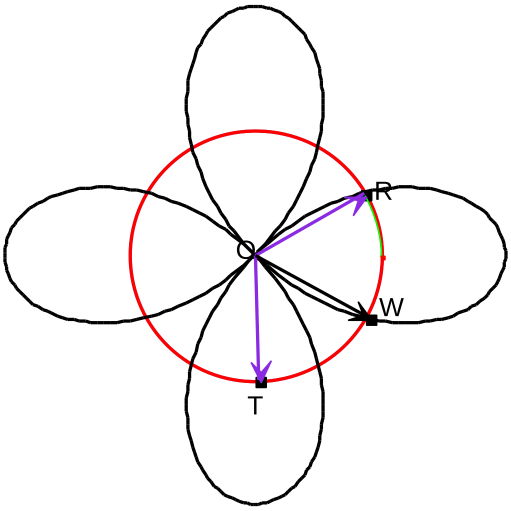
Cuadrifolium

Este lugar geométrico se obtiene cuando:

Radio 1 = 2a

Radio 2 = 2a

Velocidad = -3a

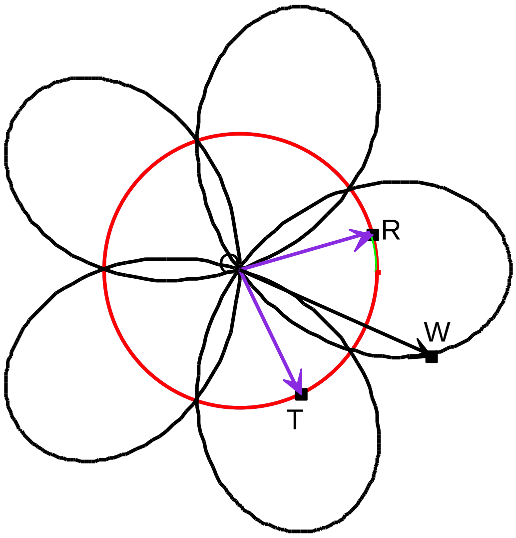


Hipotrocoide

Radio 1 = 2

Radio 2 = 2

Velocidad = -4

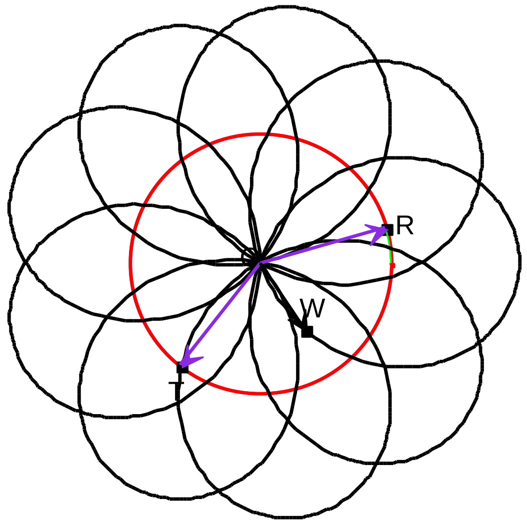


Hipotrocoide

Radio 1 = 2

Radio 2 = 2

Velocidad = -8

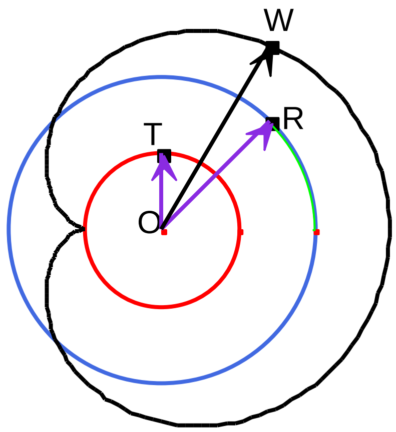


Cardioide

Radio 1 = 2

Radio 2 = 1

Velocidad = 1

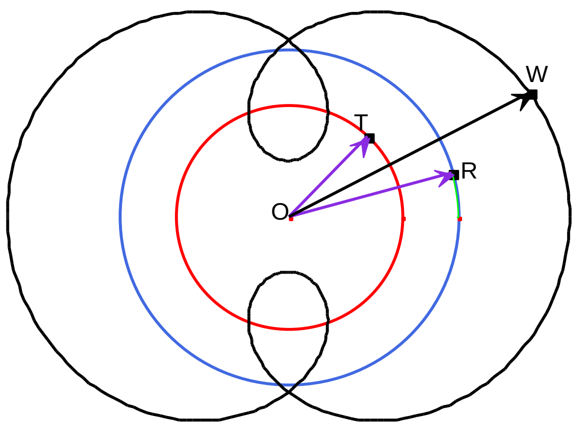


Nefroide

Radio 1 = 3

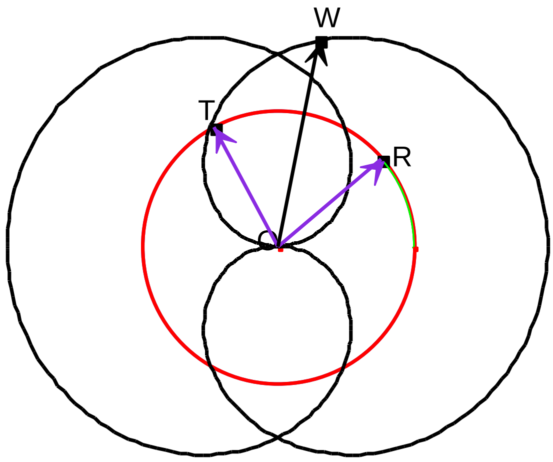
Radio 2 = 2

Velocidad = 2



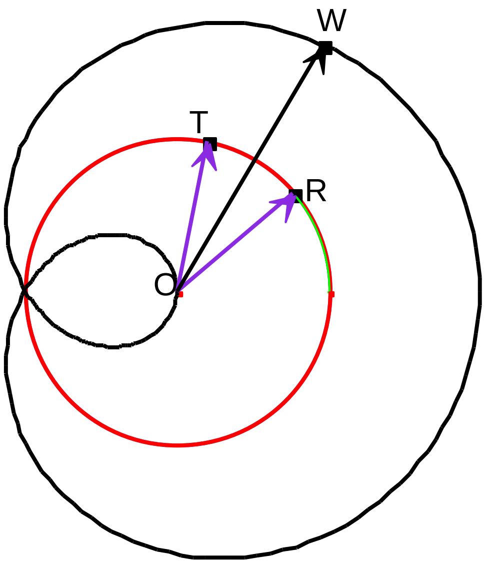
Espiral de Durero

Radio 1	=	2
Radio 2	=	2
Velocidad	=	3



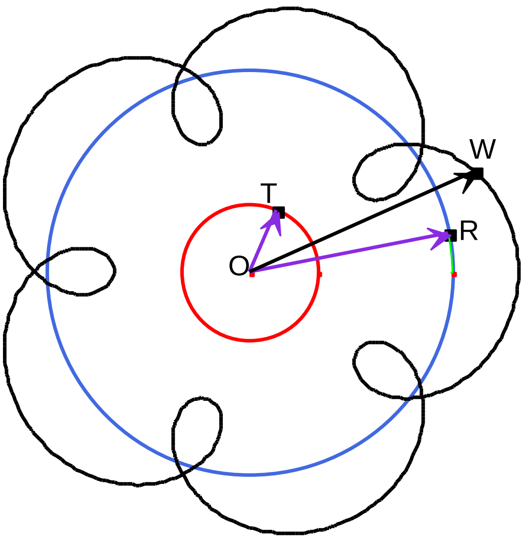
Caracol de Pascal

Radio 1	=	2
Radio 2	=	2
Velocidad	=	2



Hipocicloide de cinco ciclos

Radio 1	=	3
Radio 2	=	1
Velocidad	=	2

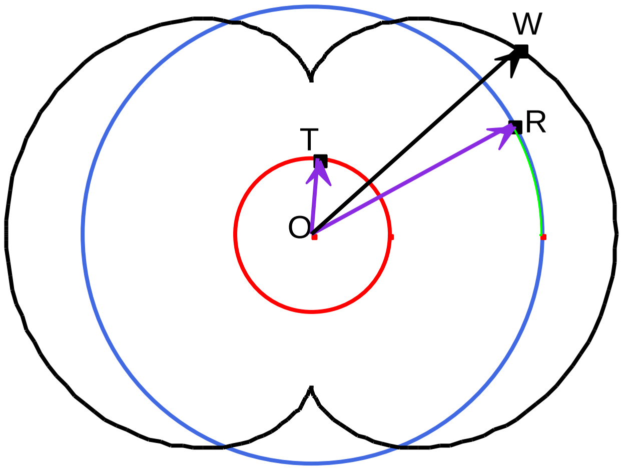


Epicicloide de dos ciclos

Radio 1 = 3

Radio 2 = 1

Velocidad = 1



Epicicloide de tres ciclos

Radio 1 = 2 ;

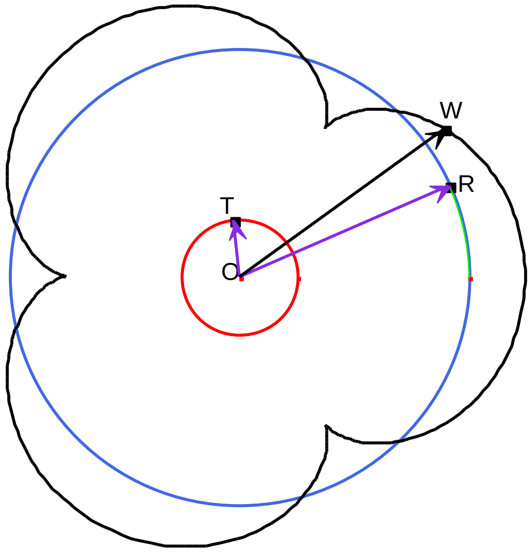
4

Radio 2 = 2 ;

4

Velocidad = -2 ;

1

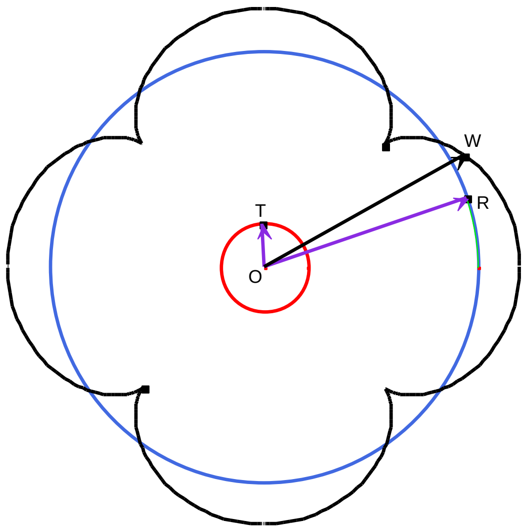


Epicicloide de cuatro ciclos

Radio 1 = 5

Radio 2 = 1

Velocidad = 1

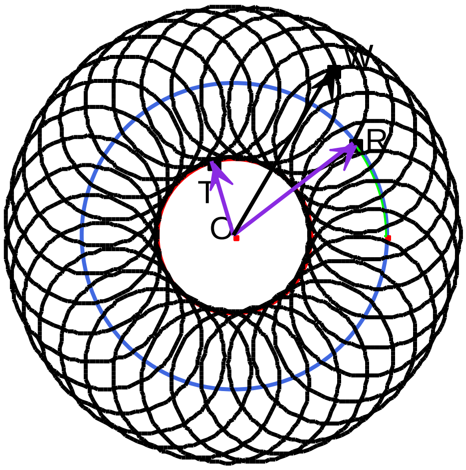


Epitrocoide

Radio 1 = 4

Radio 2 = 2

Velocidad = 14

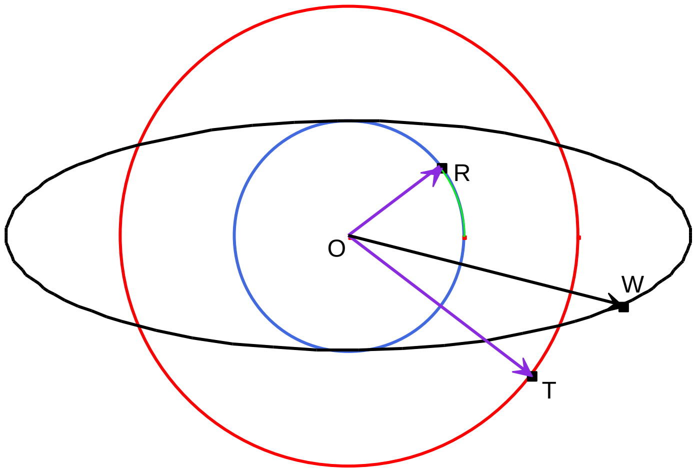


Elipse

Radio 1 = 2

Radio 2 = 4

Velocidad = -2

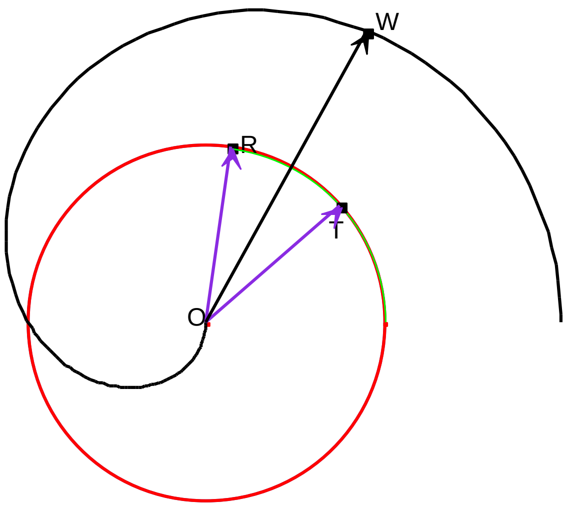


Espiral

Radio 1 = 3

Radio 2 = 3

Velocidad = 0.5

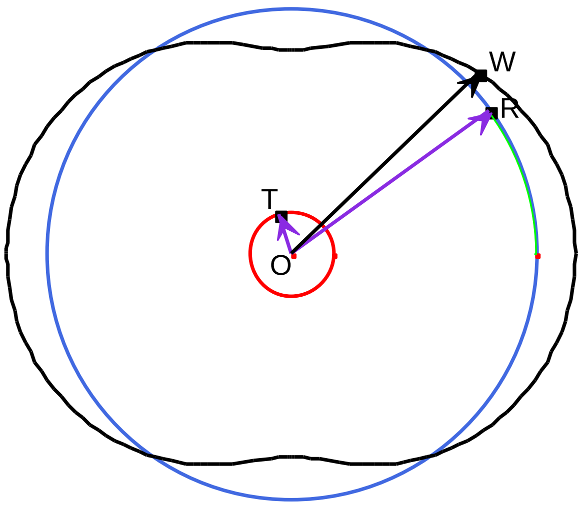


Ovalo de Casini

Radio 1 = 3.6

Radio 2 = 0.6

Velocidad = 0.5

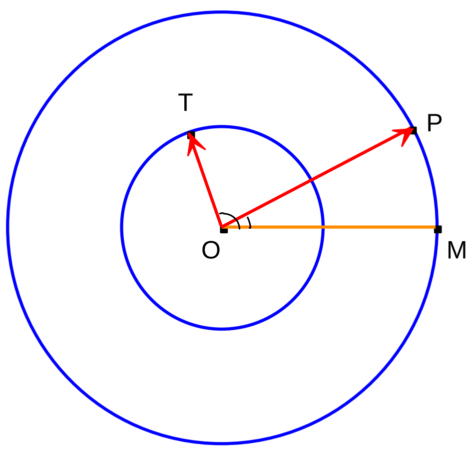


PARAMETRIZACIÓN DE LAS CURVAS OBTENIDAS

Consideremos dos circunferencias concéntricas de radios R y r y centradas en O y tracemos el radio OM de la circunferencia C_R.

Marcamos un punto móvil P sobre C_R, determinamos el ángulo □ = ∡MOP y trazamos el vector u = OP.

Determinamos el ángulo □ = n□, (n≠0), y trazamos el vector v = OT tal que ∡MOT = □.



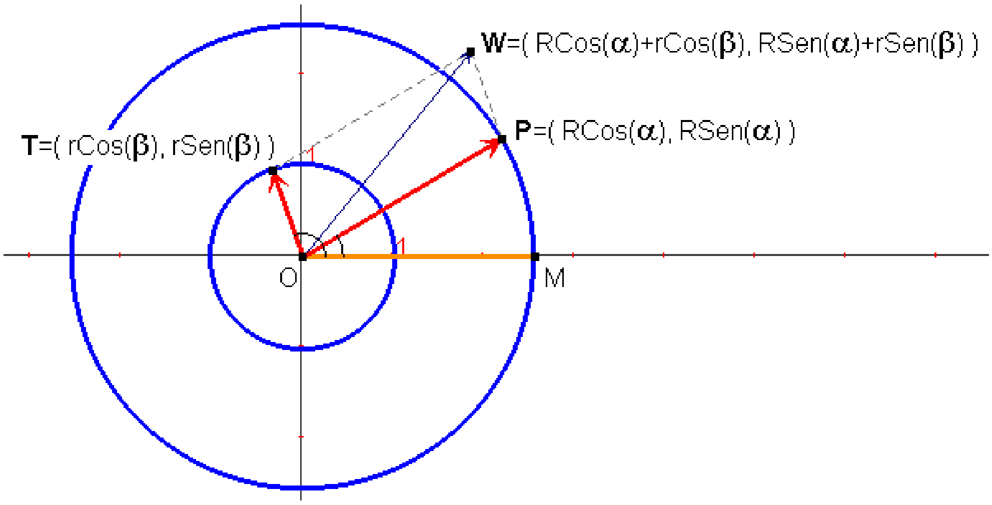
Las coordenadas del punto P son x = RCos(□), y = RSen(□).

Las coordenadas del punto T son x = rCos(□), y = rSen(□).

Construimos el vector suma OW = OP + OT, donde las coordenadas de W son:

x = RCos(□) + rCos(□), y = RSen(□) + rSen(□).

x = RCos(□) + rCos(n□), y = RSen(□) + rSen(n□).



Usando esta parametrización del punto W, podemos obtener parametrizaciones particulares, dándole valores a R, r y n. Por ejemplo:

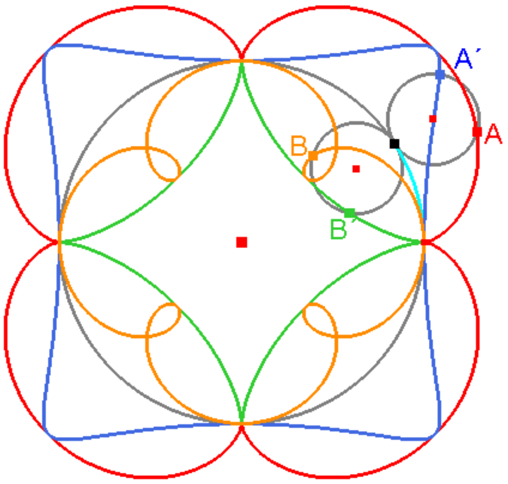
Si R=2, r=2 y n=2, entonces h(□) = [2Cos(□) + 2Cos(2□), 2Sen(□) + 2Sen(2□)] es la ecuación para el caracol de Pascal.

Si R=2, r=2 y n=-3, entonces h(□) = = [2Cos(□) + 2Cos(3□), 2Sen(□) - 2Sen(3□)] es la ecuación para el cuadrifolium.

Si R=2, r=2 y n=-2, entonces h(□) = = [2Cos(□) + Cos(2□), 2Sen(□) + Sen(2□)] es la ecuación para el trifolium.

EL MECANISMO TRADICIONAL

El mecanismo tradicional para trazar algunas curvas mecánicas, consiste en trazar una circunferencia de radio R y una circunferencia de radio r (R=nr) que sea tangente a la primera, bien sea interior o exterior. Cuando la circunferencia de radio r se desliza sobre la circunferencia de radio R se genera un lugar geométrico. En el gráfico siguiente se muestran las diferentes curvas resultantes cuando el radio de la circunferencia C_r es la cuarta parte del radio de la Circunferencia C_R.



BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, J. (2000). *Curvas en la historia*. España: Nivela Libros y Ediciones.

Lehmann, C. (1994). *Geometría Analítica*. México: Editorial Limusa.