

## UMA INTRODUÇÃO À PERSPECTIVA CONICA

Vincenzo Bongiovanni

[Vincenzo.bongiovanni@uol.com.br](mailto:Vincenzo.bongiovanni@uol.com.br)

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO. Brasil

### RESUMO

*O objetivo da oficina (Taller) é revisitar algumas das idéias precursoras da geometria projetiva. O encontro começará com uma breve introdução histórica da perspectiva cônica, ilustrada com figuras Cabri, e terminará com algumas atividades, sobre a perspectiva plana, propostas aos participantes*

### AS IDÉIAS PRECURSORAS DA GEOMETRIA PROJETIVA

Durante muito tempo a obra de Euclides serviu de modelo para o ensino da geometria. Autores posteriores a Euclides, respeitavam a divisão dos livros feitas por ele bem como a disposição e a formulação das diferentes proposições.

Uma das primeiras rupturas com a geometria euclidiana surgiu no Renascimento a partir de uma nova representação do espaço nas artes. Na Antiguidade e na Idade Média, o espaço era apenas o lugar onde estavam os objetos. Esses podiam se mover livremente e ser comparados entre si. Mas a representação do vazio entre os objetos não era considerada. Na pintura, o olho do observador era colocado em vários pontos de observação e as imagens obtidas em cada visada eram justapostas e representadas num mesmo plano. A grande novidade introduzida no Renascimento é que agora toda a cena podia ser observada de um único ponto de vista e a profundidade de um quadro podia ser deduzida matematicamente.

A quem atribuir essa nova representação do espaço? Até meados do século XIX, Alberti (1404-1472) era considerado o primeiro a expor essas idéias no seu livro “Da Pintura”. Mas a partir de 1870 foram encontrados trabalhos de Filarete, Ghiberti e Manetti que apontam Filippo Brunelleschi (1377-1446) como o provável inventor dessa nova representação chamada perspectiva.

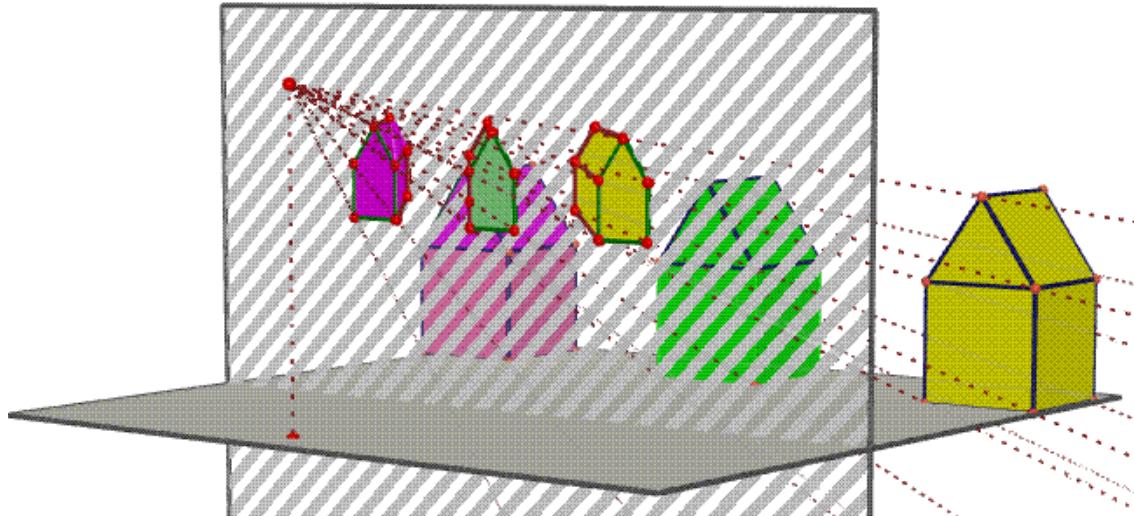
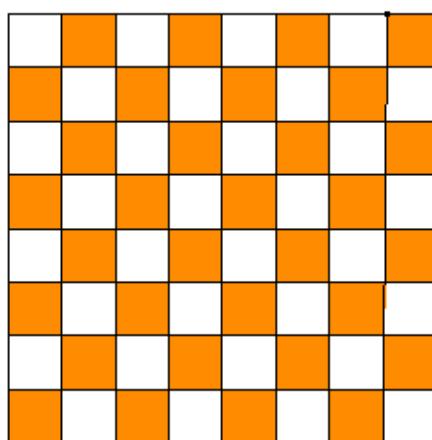


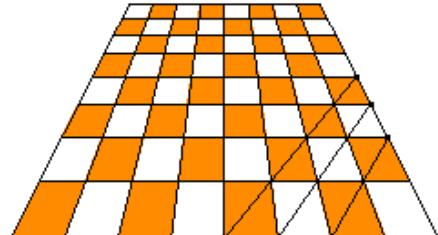
Figura construída com Cabri 3D

Na obra de Alberti, encontramos pela primeira vez a explicação do novo procedimento para representar os objetos do espaço: “quando devo pintar eis como procedo: desenho um retângulo tão grande quanto eu queiro e o considero como sendo uma janela aberta na qual olho aquilo que será pintado nesse quadro.” O desenho representado na janela constitui a perspectiva do objeto. Uma das primeiras consequências desse novo modo de representação é que retas paralelas contidas num plano horizontal, podem apresentar aparências, no quadro vertical, de retas concorrentes num ponto. Esse ponto recebeu mais tarde o nome de ponto de fuga.

Nessa época, a reprodução dos quadriculados era de grande importância para os pintores pois servia de suporte para desenhar os objetos e os personagens de uma cena. Mas o grande problema estava em como indicar a profundidade, como indicar o espaçamento entre duas retas paralelas?

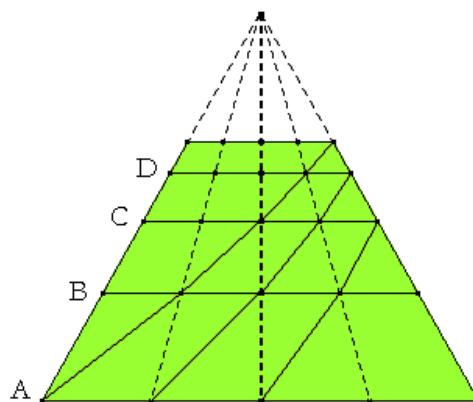


Visão euclidiana de um quadriculado



Visão perspectiva de um quadriculado

Na falta de uma regra precisa, os pintores, na representação de um quadriculado, usavam a regra dos  $2/3$  ( $BC = \frac{2}{3} AB$ ,  $CD = \frac{2}{3} BC$ , ...). Mas essa regra apresentava falhas, pois não conservava o alinhamento das diagonais dos quadrados.



Alberti critica essa regra no seu livro e propõe uma construção que preserva esse alinhamento. Essa construção é chamada de “construção legítima”.

### A CONSTRUÇÃO DO QUADRICULADO PELO MÉTODO DE ALBERTI

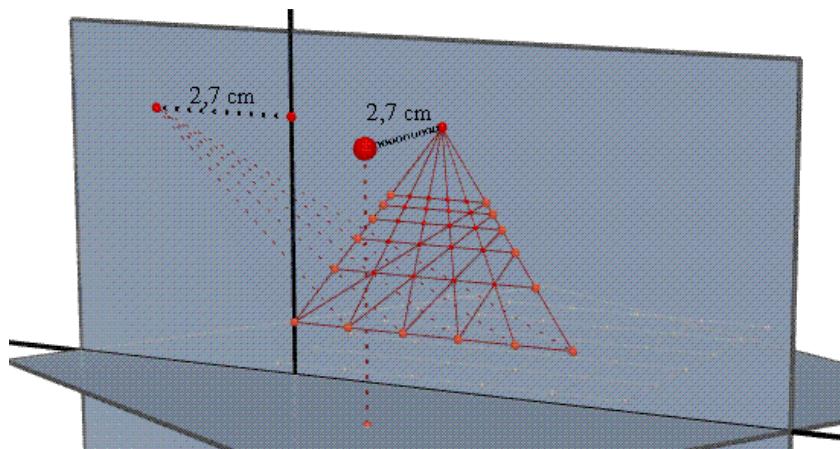


Figura construída com Cabri 3D

A complexidade dessa construção conduziu os pintores a inventar outros processos mais simplificados. Um deles é descrito nas obras de Piero della Francesca (1420-1492).

## O MÉTODO DOS PONTOS DE DISTÂNCIA

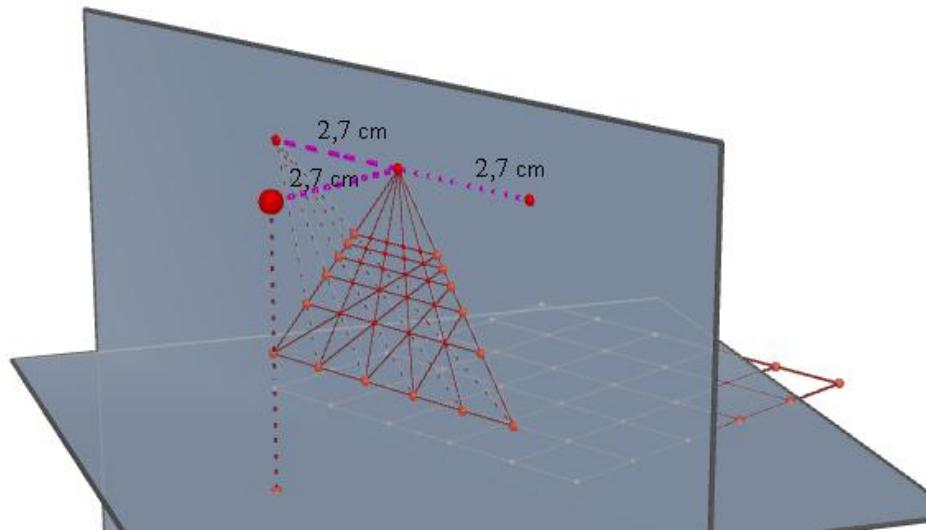
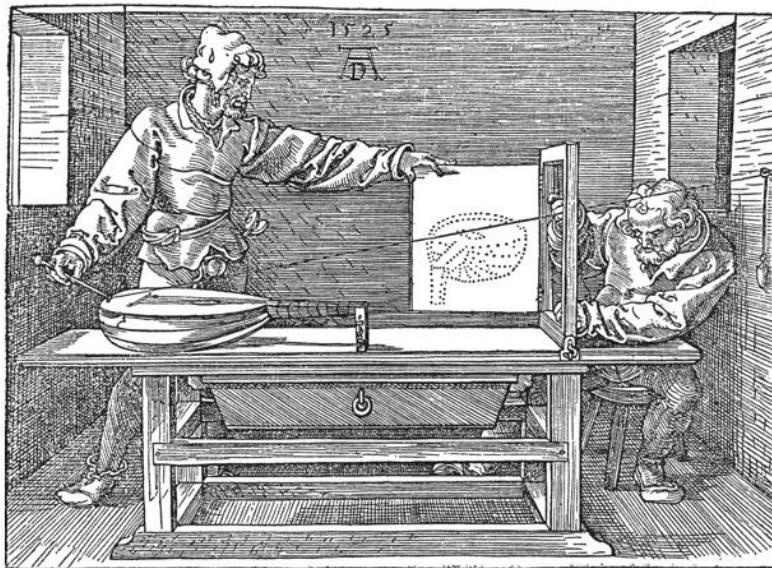


Figura construída com cabri 3D

Albrecht Durer (1471-1528) utilizava instrumentos para representar objetos tridimensionais. A figura abaixo mostra como Durer representa um alaúde (instrumento musical) em perspectiva. As coordenadas da imagem de cada ponto do alaúde são determinadas pela posição de dois fios, um vertical e outro horizontal, presos à moldura de madeira.



O desenhador de alaúdes

O estudo da perspectiva foi evoluindo até se tornar, em 1600, um ramo da geometria, com a publicação da obra de Guidobaldo del Monte “*Os seis livros da perspectiva*”. Foi a primeira obra de perspectiva que utiliza o método de Euclides com

definições, proposições e corolários. Não se tratava mais de receitas mas de verdadeiras demonstrações geométricas argumentadas e seguidas de aplicações práticas. Essa obra foi traduzida para o italiano em 1984 e tem despertado um interesse crescente entre os pesquisadores dessa área.



Figura 1 A figura acima representa a capa do livro de Guidobaldo “Os seis livros da perspectiva”. É a perspectiva de um prisma pentagonal a partir de 4 pontos de fuga

## O NASCIMENTO DA GEOMETRIA PROJETIVA

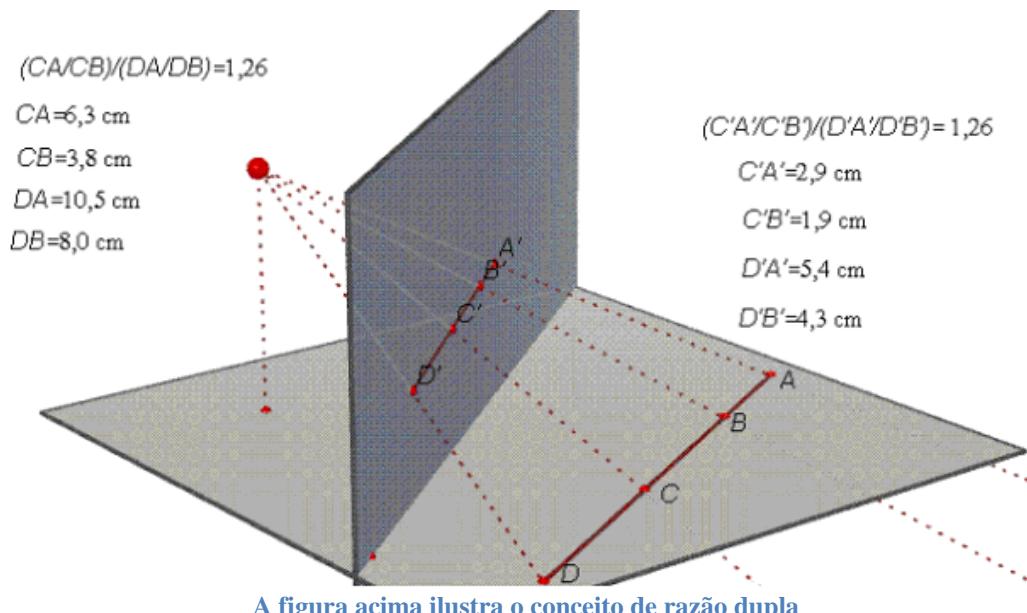
No início do século XVII, Desargues ao procurar generalizar as regras da perspectiva utilizadas pelos artistas introduz novos conceitos. Em 1639, publica uma obra intitulada “*Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec um plan*” onde faz uma síntese entre as cônicas de Apolônio e a perspectiva do Renascimento. A geometria projetiva nasce da conjunção dessas duas teorias. A idéia principal dessa obra é de considerar as cônicas como perspectiva de uma circunferência. Quando se olha uma circunferência apoiada num plano horizontal e representada num plano vertical, estamos considerando o ponto de vista da perspectiva. Mas quando se olha a circunferência como base de um cone e o observador como vértice do cone, estamos considerando o ponto de vista de Apolônio. Mas enquanto Apolônio estuda cada curva isoladamente, Desargues inova, estudando as três curvas simultaneamente. Para esse estudo unificado é necessário postular que as retas paralelas se intersectam no infinito. Nasce o ponto a distância infinita ou simplesmente o ponto impróprio. Nessa

obra, Desargues coloca em evidência um invariante que permite transportar propriedades conhecidas da circunferência para as cônicas. É a involução de seis pontos. A principal característica dessa nova propriedade é que ela se conserva por projeção. Desargues estuda as propriedades planas das cônicas a partir do espaço. Historicamente vemos aqui uma ruptura com a geometria grega que estudava primeiro a geometria plana e depois a geometria espacial.

## O APOGEU DA GEOMETRIA PROJETIVA

As idéias de Desargues foram continuadas por Pascal, Philippe de la Hire e Poivre. Mas logo foram eclipsadas pela geometria de Descartes. Foi somente em 1822 que Poncelet (1788-1867) redescobre e retoma essas idéias completando dessa forma o estudo da geometria projetiva.

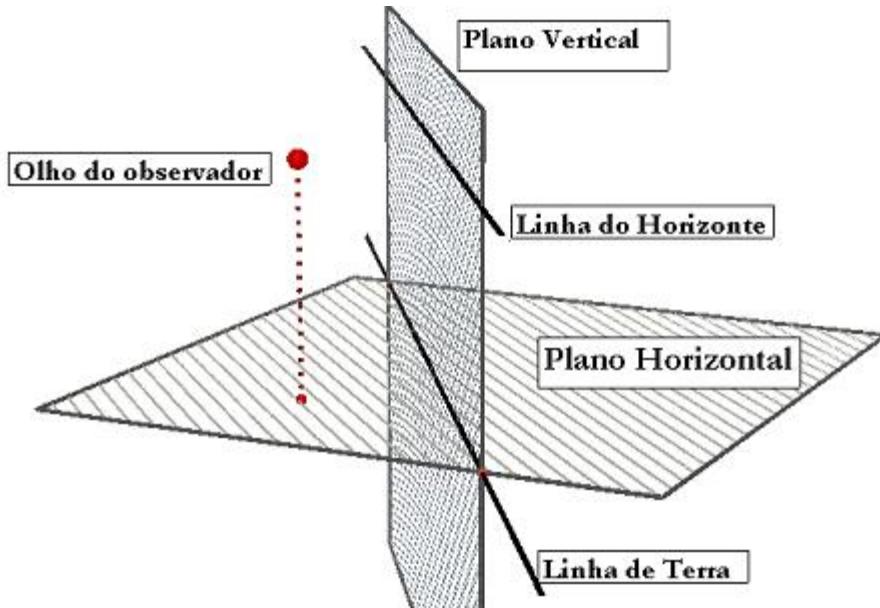
A geometria projetiva se preocupa em estudar as propriedades das figuras que, traçadas em um plano e projetadas em outro plano, a partir de um ponto permanecem inalteradas. Entre as propriedades que se preservam por projeção citamos o alinhamento de pontos, a ordem dos pontos, os pontos de interseccão de curvas, as retas tangentes, a razão dupla (chamada de invariante fundamental), etc...



A figura acima ilustra o conceito de razão dupla

Atividades sobre a perspectiva central

Na resolução das atividades, a seguir, consideraremos a seguinte nomenclatura



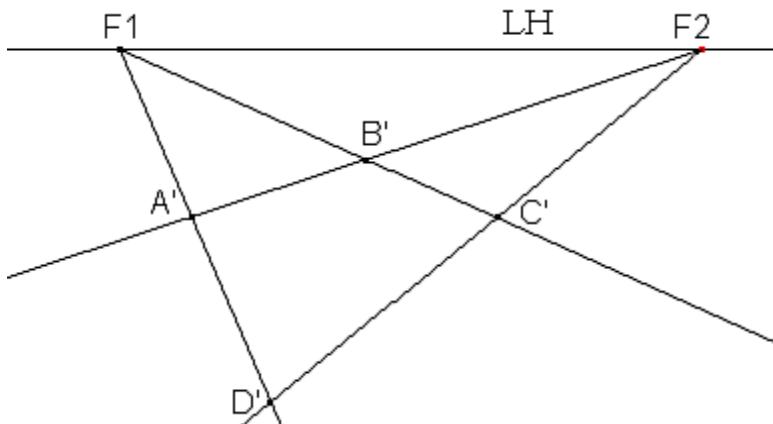
### Atividade 1

Um paralelogramo ABCD está situado no plano horizontal. Construir a sua perspectiva no plano vertical (correspondendo à sua folha de papel ou à sua tela do computador) e nomear respectivamente de A', B', C' e D' as perspectivas dos pontos A, B, C e D. É dada a linha do horizonte (LH).

LH

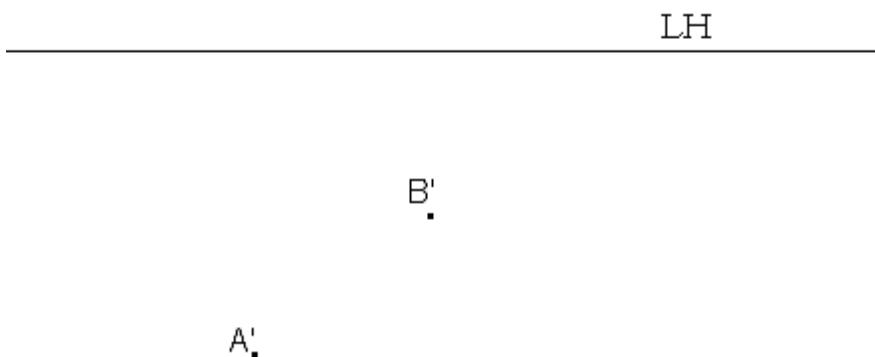
### Atividade 2

Um paralelogramo ABCD está situado no plano horizontal e representado em perspectiva pelos pontos A', B', C' e D'. Sendo dados os pontos de fuga F1 e F2 e a linha do horizonte (LH), construir os pontos médios dos lados A'B', B'C', C'D' e D'A'.



Atividade 3

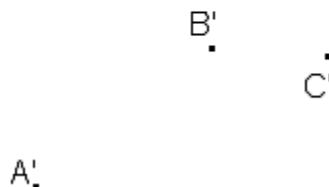
$A'$  e  $B'$  são dois pontos de uma foto. Construir o ponto médio do segmento  $A'B'$  sendo dada a linha do horizonte.



Atividade 4

Dado um segmento  $AB$  no plano horizontal e um ponto  $C$  fora não pertencente à reta  $AB$ . Sejam  $A'B'$  e  $C'D'$  respectivamente, as perspectivas do segmento  $AB$  e do ponto  $C$ . Construir um ponto  $D'$ , perspectiva do ponto  $D$ , de modo que o segmento  $CD$  seja congruente ao segmento  $AB$ .

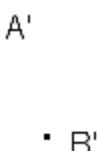
LH



## Atividade 5

Uma reta  $r$  contida no plano horizontal contém dois segmentos  $AB$  e  $CD$  congruentes. Dada a perspectiva  $A'B'$  do segmento  $AB$ , construir a perspectiva  $C'D'$  do segmento  $CD$ .

LH



## Atividade 6

Um segmento  $AB$  está contido no plano horizontal e é paralelo à linha de terra. Sabe-se que  $A'B'$  é a perspectiva do segmento  $AB$ . Sejam  $C$  e  $D$  os pontos do segmento  $AB$  que o dividem em três partes iguais. Obter as perspectivas  $C'$  e  $D'$  dos pontos  $C$  e  $D$ .

LH

---



### Atividade 7

Um segmento  $AB$  está contido no plano horizontal. Sabe-se que  $A'B'$  é a perspectiva do segmento  $AB$ . Sejam  $C$  e  $D$  os pontos do segmento  $AB$  que o dividem em três partes iguais. Obter as perspectivas  $C'$  e  $D'$  dos pontos  $C$  e  $D$ .

LH

---

