CONSTRUCCIÓN DE TÓPICOS DEL CÁLCULO DE UNA Y VARIAS VARIABLES (EL USO DE LAS MACRO CONSTRUCCIONES)

(1) Luis Esteban Macías Gutiérrez – (2) Héctor Jesús Portillo Lara –

(3) Natividad Nieto Saldaña

(1) lmacias@uacj.mx **– (2)** portillolar@hotmail.com **– (3)** nnieto@uacj.mx

Departamento de Ciencias Básicas del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. MÉXICO

RESUMEN

En el presente curso se realizaran construcciones de distintos temas del cálculo en una y varias variables, en las cuales no solo se privilegia la visualización, si no también otros distintos registros, siendo esta primera muy importante ya que diversas investigaciones (Hitt) reportan que la visualización de los conceptos matemáticos son importantes. Estas construcciones pueden ser utilizadas como herramienta en el salón de clase o como un medio entre el alumno y el aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

El uso de las tecnologías en el aula como una herramienta es una alegría para el profesor ya que habilitadores geométricos como Cabri Geometry II Plus facilitan la visualización de tópicos de matemáticas. En la actualidad las investigaciones de matemática educativa, han tenido un corte tecnológico, investigaciones realizadas por Hitt (1997), Vinner(1991); han reportado, que el uso de la visualización de conceptos matemáticos juega un papel importante en el aprendizaje de los temas en juego.

Para Dorier (2000) el cálculo y el álgebra lineal son las áreas principales de enseñanza en las universidades de ciencias, sin embargo su enseñanza siempre ha sido difícil. Este mini curso trata sobre la construcción de algunos tópicos del cálculo (Diferencial, Integral y Vectorial) como por ejemplo graficación de funciones (continuas o definidas por partes), la función derivada, recta tangente, área bajo una curva, funciones en dos variables, derivada parcial, por mencionar algunos. En estos temas no solo se privilegia la visualización sino también otros distintos registros como los son el numérico y un poco el algebraico. El objetivo principal del curso es el proveer al maestro y/o al estudiante construcciones donde estos personajes tomen al Cabri

Geometry II Plus como una herramienta en el salón de clase o como un medio de aprendizaje.

BASE TEÓRICA

Este curso está basado en la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1993), las TRS son producciones construidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Las figuras geométricas, los enunciados, las fórmulas algebraicas, las graficas, etc., son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. En la TRS existen los siguientes registros de representación (RR):

- La representación gráfica: La cual está dada por medio de una figura geométrica o una gráfica, superficie, etc.
- La representación numérica: Esta dada por medio de tablas de números principalmente, entre otras.
- La representación analítica: Es representada por medio de una ecuación. Sobre estos registros de representación son aplicados los constructos *conversión* y *tratamiento*, en donde la conversión de una representación es definida como la transformación de una representación a otro en un registro distinto y al tratamiento de una representación como la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. Para Sierpinska (2000) existen 3 tipos de idiomas similares a los RR, esto son: El Idioma Geométrico, el Idioma aritmético y finalmente el Idioma Algebraico.

¿POR QUE REALIZAR ESTE CURSO?

Este curso fue pensado después de haber realizado una pequeña investigación preliminar en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (aun en curso), en la que principalmente se le hicieron preguntas a los alumnos de ingeniería de esta misma institución, por ejemplo en el tema de *derivada parcial* se les pregunto lo siguiente:

Da la definición de derivada parcial de x e y de una función.

Encuentra la derivada parcial de la función $f(x;y) = 2 - x^2 - y^2$.

Dibuja las derivadas parciales de la anterior función en el punto (1,2).

Algunas de las respuestas de los alumnos mostraron que la mayoría de los cursos de cálculo en varias variables se privilegia solo el registro algebraico, pero enfocado a la mecanización, a continuación mostramos las respuestas de un alumno, estas respuestas fueron muy similares al resto del grupo:

Alumno 1:

1. Da la definición de derivada parcial en *x* y *y*.

solo se deriva una ~~constante~~ ~~[illegible]~~ variable tomando a la otra como constante y después se obtiene la otra.

2. Encuentra las derivadas parciales en x y y de la función:

$$f(x,y)=2-x^2-y^2$$

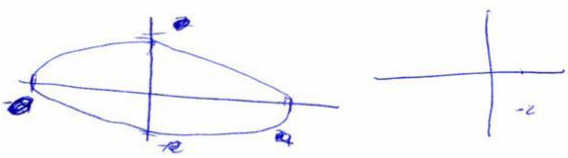
$f_x(x,y) = -2x$

$f_y(x,y) = -2y$

3. Dibuja las derivadas parciales en *x* y *y* de la anterior función en el punto (1,2).

$f_x(1,2) = -2(1) = -2$

$f_y(1,2) = -2(2) = -4$



Como mostramos la visualización de estos conceptos es casi nula por los estudiantes, no solo en este tema si no en otros también, por este hecho nos dimos a la tarea de realizar este curso en los distintos tópicos del cálculo, ya sean en su forma de una o varias variables o vectoriales. A continuación mostramos algunas de las construcciones que serán realizadas en el curso. El curso estará dividido en tres secciones: Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo en varias Variables y Finalmente Cálculo Vectorial.

CONSTRUCCIÓN DE LA MACRO "GRAFICACIÓN EN R2".

Para empezar con la construcción de estos tópicos de cálculo se deben construir distintas macros las cuales serán utilizadas para Cabri-construcciones posteriores, la primera de estas macros es una en la cual al seleccionar dos valores (x e y) estos son plasmados en la pantalla de Cabri como un punto con coordenadas (x, y) , para esta construcción se debe de seguir los siguientes pasos:

Generemos los valores $x = 2$ y $y = 3$, los cuales serán transferidos en los ejes x e y respectivamente y nómbrelos con las letras x e y, después obtenga el punto medio entre estos dos puntos y lo etiquetamos con la letra m.

Para graficar el punto con coordenadas (x, y) normalmente se trazan rectas paralelas a los ejes las cuales deberán pasar por los puntos x e y y la intersección entre estas dos será nuestro punto (Figura 1). Para generar punto (x, y) sin la necesidad de estas rectas y así ahorrarnos píxeles, se debe de seguir el siguiente paso:

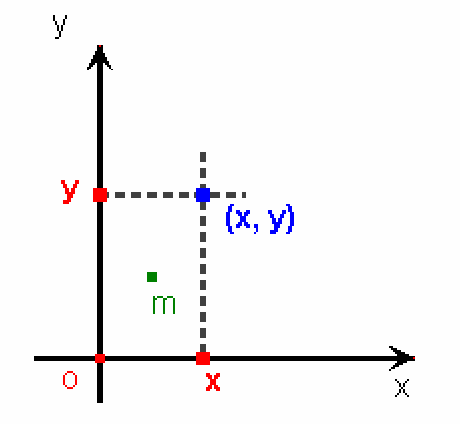


Figura 1

Tracemos la simetría central del origen de los ejes con respecto al punto medio m y así se obtendrá el punto con coordenadas (2,3) (figura 2).

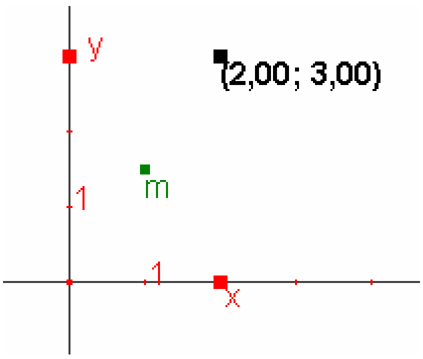


Figura 2

Para la construcción de esta macro se debe analizar que Cabri-objetos son primordiales para la construcción del punto (x, y) , esto son: los valores y puntos x e y, el punto medio m , los ejes y finalmente el origen, solo que para obtener los puntos x, y y m es necesario tener los valores x e y, por esta razón un objeto primordial serán estos dos, el origen depende de los ejes así que aun es más primordial los ejes. Por lo tanto los *objetos iníciales* de la macro son los ejes y los valores x e y, como *objeto final* será el punto con coordenadas (x, y) , esta macro tendrá el nombre de *Graficación en R2*. Para comprobar que esta macro funciona generemos los valores $x1 = 4$ y $y1 = 5$ y elijamos la nueva herramienta llamada *Graficación en R2*, por medio del ratón seleccionemos estos valores y finalmente los ejes, de esta forma se generará en la pantalla el punto con coordenadas (4,5).

GRAFICACIÓN DE LA FUNCIÓN *F(X) = A SEN (BX + C)*

Un objeto matemático denominado función es importante en el cálculo de una variable, sobre todo la representación gráfica, a continuación se muestra la construcción de la gráfica de la función $f(x) = A\, Sen(Bx + C)$, la cual posteriormente será utilizada para el análisis de la función derivada $f'(x)$ y a las trasformaciones de funciones como los desplazamientos, etc.

Generemos los valores A = 2 , B = 3 y C = 1 de tal forma que estos puedan ser modificados por medio de la herramienta *Número*, tracemos un punto x sobre el eje x de tal forma que este pueda viajar continuamente y libre.

Con la herramienta *Calculadora* y los valores de A, B, C y tomando a la primer coordenada del punto x como el valor x de la función $f(x) = A\, Sen(Bx + C)$ obtenemos el valor de $f(x)$ y por medio de la macro *Graficación en R2* graficamos el punto $(x, f(x))$.

Solo faltaría graficar la curva senoidal y decorar un poco el archivo de Cabri, ya que consideramos que el alumno al trabajar con el archivo este debe ser estético. Para graficar la curva solo se necesita utilizar la herramienta *Lugar*, a continuación mostramos el archivo en Cabri ya terminado (figura 3).

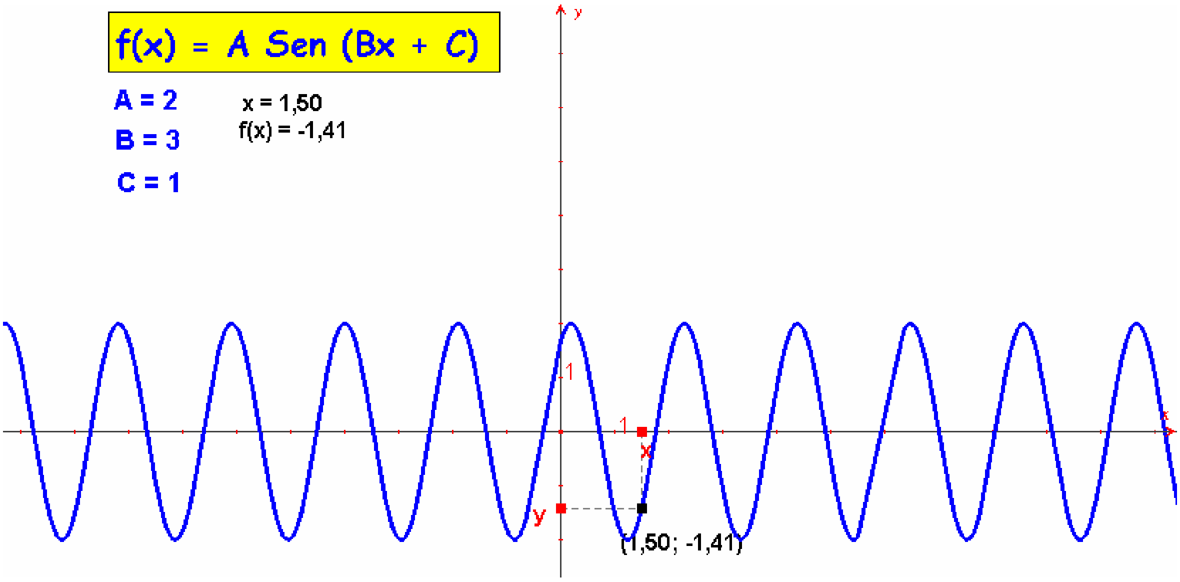


Figura 3

Con este archivo el alumno podrá analizar las traslaciones que tiene la gráfica, así como su amplitud y su periodo, si se quisiera graficar sobre esta gráfica solo un periodo de color rojo, se debe de seguir los siguientes pasos para la construcción de una macro:

La idea principal de esta macro es que con solo seleccionar a los valores *A*, *B* y *C* y el punto *x*, se grafique la curva senoidal.

Por lo tanto elegimos como los objetos iniciales a los valores de A, B, C, el punto x y los ejes, como *objeto final* a la curva senoidal, a esta macro la llamamos *Curva, A Sen (Bx + C).*

Como solo se necesita graficar un solo periodo se tiene que recordar que este se calcula como $2\pi / B$, por lo tanto con la calculadora obtenemos el valor del periodo.

Al obtener el valor del periodo lo transferimos al eje x, seguido de un segmento que valla del origen al punto transferido y sobre este un punto, el cual será uno de nuestro *objetos iniciales*.

Elijamos la macro Curva, A Sen (Bx + C) y seleccionamos los valores A, B, C, el punto sobre el segmento y finalmente los ejes, parece ser que no grafico nada, pero si nos acercamos con el ratón a la curva donde supuestamente debe estar la nueva gráfica observaremos que ahí se encuentra por lo tanto solo se debe de pintar de un color distinto y así de esta forma se observa que al modificar los valores la curva seguirá respetando al periodo de la función (figura 4).

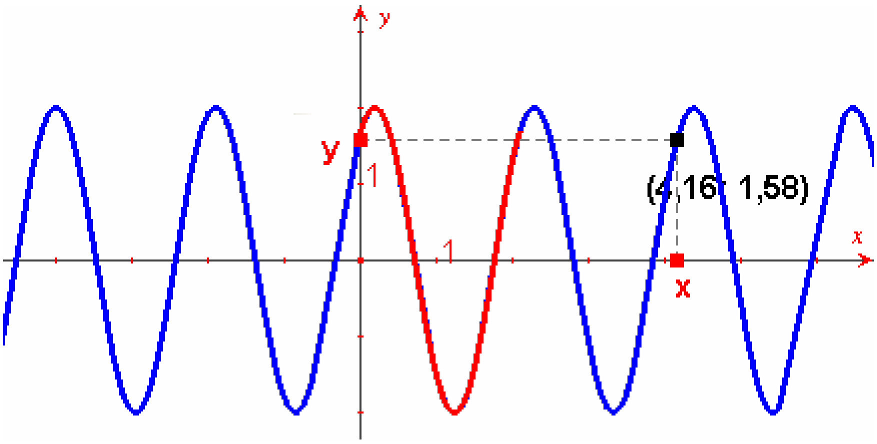


Figura 4

LA IGUALDAD SEN(X + C) = COS X.

Una igualdad que se muestra en las clases de trigonometría es $Sen\left(x+\frac{\pi}{x}\right)=Cos\ \ x$, esta igualdad puede ser representada por medio de Cabri en una construcción muy interesante, en donde va implícita la gráfica de la función *Sen*(*x* +*C*) y *Cos* (*x*) , la cual hace reflexionar que el valor de π / 2 es el valor que necesita *C* para que se cumpla esta igualdad. En si el archivo que se construirá va implícita las traslaciones de las funciones, para la realización de este archivo se debe de seguir las siguientes instrucciones:

Con la macro Curva, A Sen (Bx + C) construya la gráfica de la función Sen(x +C) con el valor de C = 0.

Con el mismo punto x y con la herramienta Calculadora y la macro Graficación en R2, construya la gráfica de la función *Cos* (*x*) (figura 5).

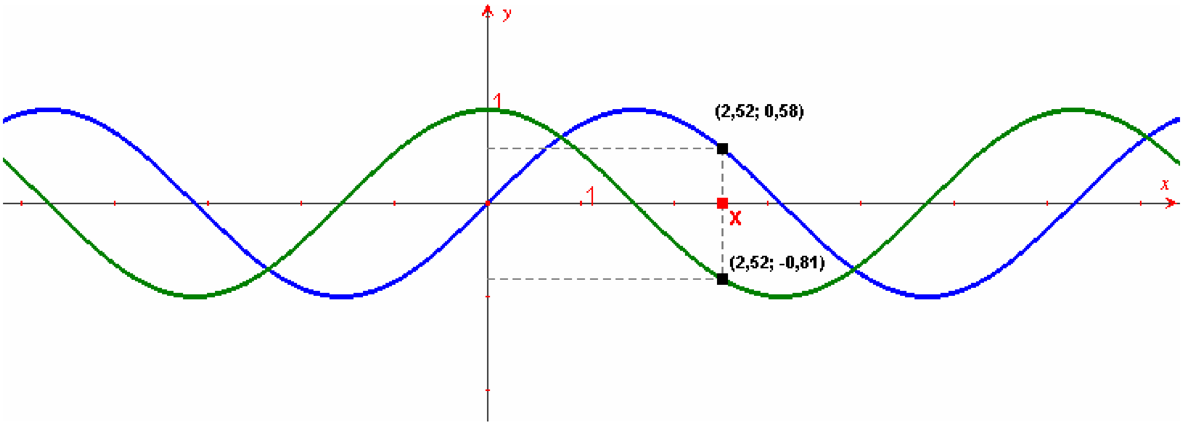


Figura 5

Si se empieza modificar los valores de C positivo, se observa que la gráfica empieza a desplazarse hacia la izquierda y en el momento en que $C \approx 1.57$ las dos gráficas son la misma, por lo tanto se observa gráficamente la igualdad $Sen\left(x+\frac{\pi}{x}\right)=Cos\ \ x$ (figura 6).

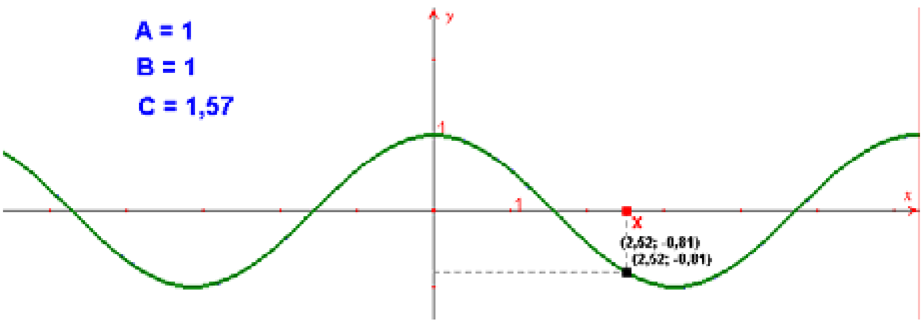


Figura 6

Esta traslación de la curva nos hace pensar si solo esto es cierto cuando $C=\frac{\pi}{2}$ ya que algunos libros sobre identidades trigonométricas solo aparece la propiedad $Sen\left(x+\frac{\pi}{x}\right)=Cos\ \ x$ y esto no es cierto ya que si seguimos moviendo el valor de C habrá más valores de C que cumplen esto, los valores para que se cumpla estos son $C=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ con $n\in Z$.

GRAFICACIÓN DE F´(X) Y F´´(X) DE LA FUNCIÓN F(X) = AX² + BX + C

Para la graficación de estas funciones se encuentra la derivada, segunda derivada y se grafican normalmente. Se traza un punto sobre el eje *x*, el cual se obtiene su coordenada, la que será considerada el valor de *x* de *f* (*x*) y sus derivadas. Obtenemos los valores *A*, *B* y *C* de tal forma que sean modificables y al obtener los valores de las funciones ($f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$) con la calculadora utilizamos nuestra macro *Graficación en R2* para obtener los puntos y así obtener sus lugares, a continuación se muestran estas gráficas cuando *A = 1*, *B = 2* y *C = 0* y cuando *A = -1*, *B = 5* y *C = 2* (figura 7 y figura 8).

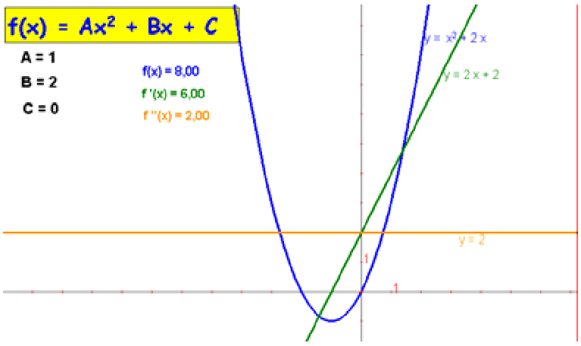


Figura 7

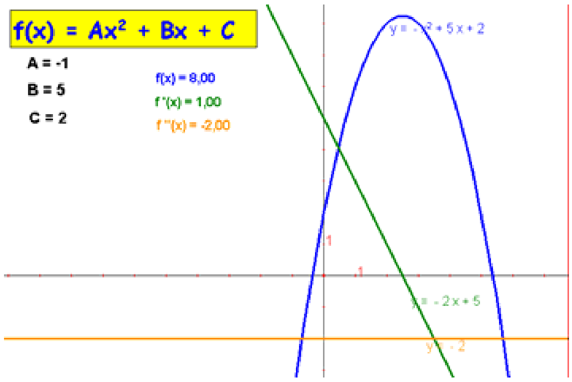


Figura 8

GRAFICACIÓN A TROZOS

La siguiente función es una en la cual tiene distintas reglas de correspondencia llamada también a trozos por ejemplo:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x^2 & -\infty \le x \le 0 \\ 3x & 0 < x < \infty \end{cases}$$

Si esta gráfica se trata de realizar en Cabri, lo primero que se tiene que pensar es como se puede hacer que un punto viaje solo por el intervalo $(-\infty,0]$ y genere una gráfica y que después viaje sobre el intervalo $(0,\infty)$ y genere otra gráfica distinta, para esto se tiene que seguir las siguientes instrucciones:

Debemos de construir sobre el eje x por medio de semirrectas los dos intervalos y sobre estas dos un punto en cada una de ellas (figura 9).

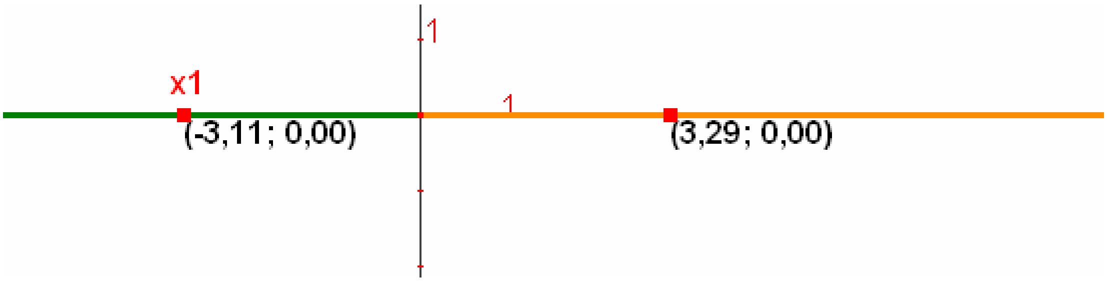


Figura 9

Con la herramienta *Calculadora* y con la macro *Graficación en R2* cada una de las sub-funciones son graficadas (figura 10).

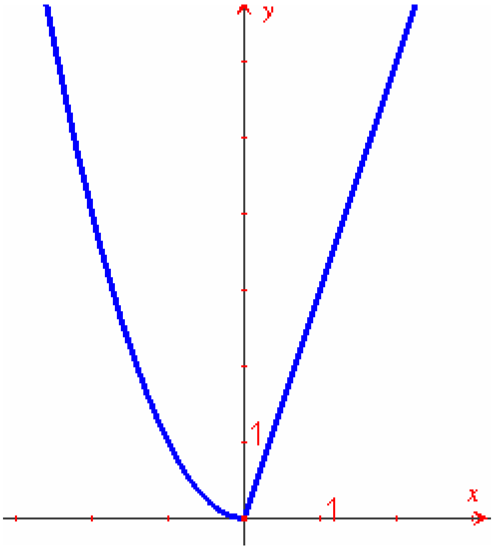


Figura 10

RECTA TANGENTE

Para graficar la recta tangente en un punto según una curva y crear una macro en la cual esta sea trazada, sea cual sea su función, se debe seguir los siguientes pasos:

Grafique la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$, al graficar esta función obtengamos el valor de la derivada de la función en el punto x_1.

Para trazar la recta tangente se necesita otro punto aparte de $(x_1, f(x_1))$, el punto extra es (*x*, *y*) en donde $x = x_1 + 1$ y $y = f'(x_1) + f(x_1)$, por medio de la calculadora y de la macro *Graficación en R2*, tracemos ese nuevo punto y finalmente tracemos la recta tangente (figura 11).

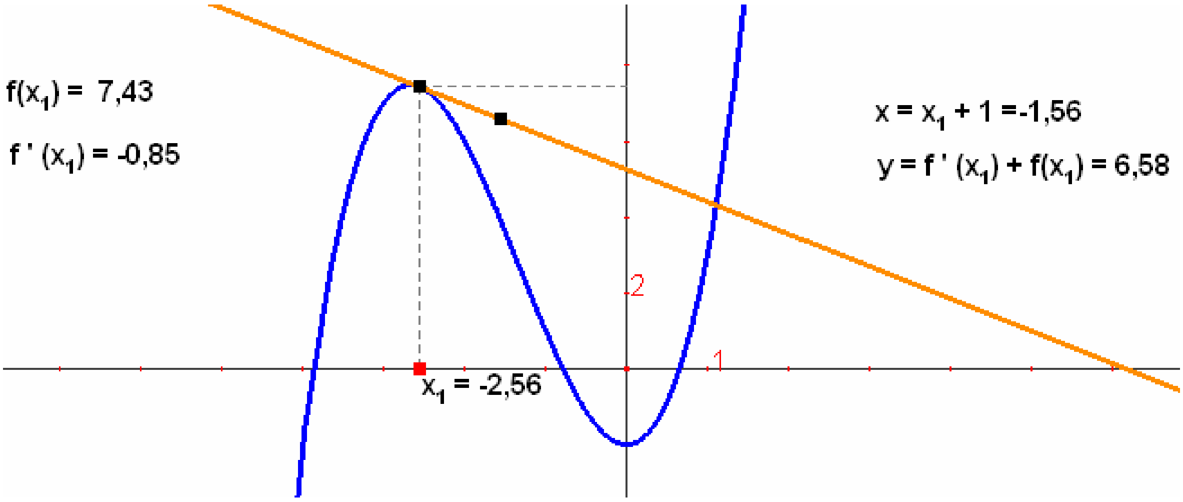


Figura 11

Para la creación de la macro se necesita como objetos iniciales al punto x_1, el eje, el valor de $f'(x_1)$ y $f(x_1)$ y como objetos finales a la recta tangente, la macro la llamaremos *Recta Tangente*. Para comprobar que la macro funciona grafique la función $f(x) = Sen(x)$, obtenga su derivada y utilicé la macro.

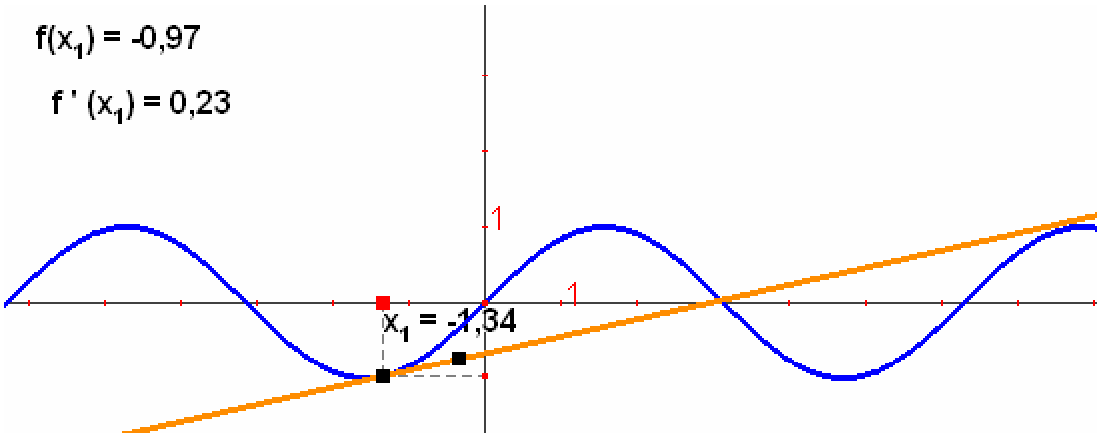


Figura 12

EL ESPACIO EN 3 DIMENSIONES

Para poder analizar archivos de cálculo en varias variables se necesita la creación de tres dimensiones en Cabri, para esto se debe de realizar las siguientes construcciones, con la ayuda de los ángulos de Euler.

CONSTRUCCIÓN DE LA REJILLA-DOMINIO

Para la construcción de superficies en R^3 se necesita tejer una rejilla por medio de polígonos, en donde un punto simulara estar viajando sobre esta como si fuera la rejilla el plano *xy*.

Construyamos un cuadrado con los vértices *k* ,*l*, *m* ,*n*.

Partamos en 32 partes iguales cada uno de los lados del cuadrado con la herramienta Punto medio.

Tejamos nuestra rejilla con la herramienta Polígono como se observa a continuación (figura 13).

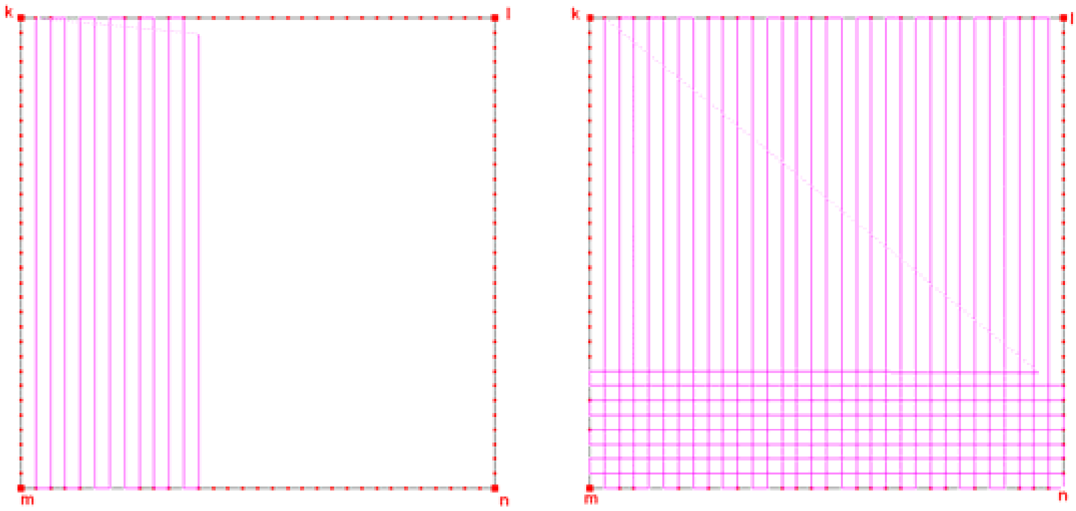


Figura 13

Nuestra rejilla después de ser tejida debe ser coloreada y los puntos medios ocultados por estética como se muestra en la figura siguiente:

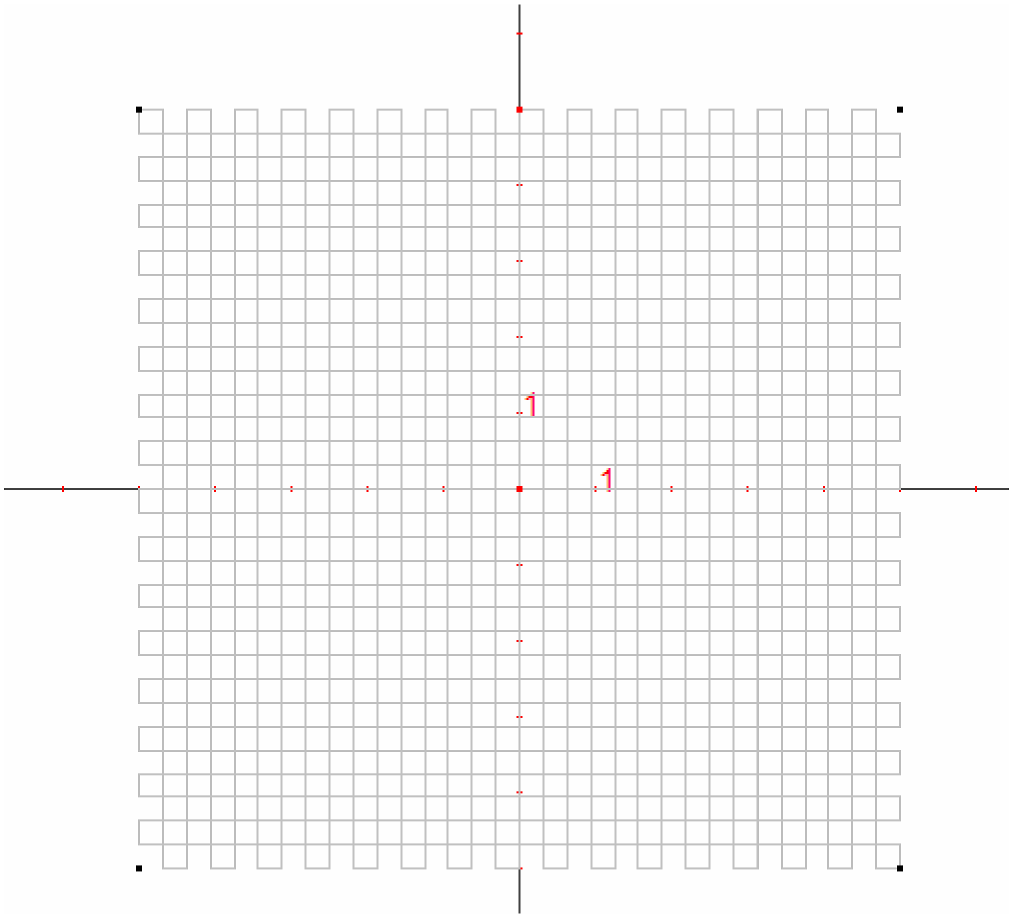


Figura 14

Construyamos una macro de nombre Rejilla, teniendo como objetos iniciales los puntos *k, l, m, n* y como objeto final a la rejilla.

MACRO DE UN PUNTO EN DOS DIMENSIONES

Esta macro es muy importante ya que para generar el espacio R^3 lo generamos por medio de vectores que simulan ser los vectores canónicos en R^2, siendo esta macro útil para la suma de vectores que dependen de dos números y dos vectores, así también esta macro localiza componentes de los vectores en el plano tomando en cuenta los vectores canónicos de R^2.

Trazamos tres puntos de tal manera que se puedan trazar con ellos los vectores $\overrightarrow{oi}$ y $\overrightarrow{oj}$.

Generemos los valores 3 y 2 con la herramienta *Número*.

Con la herramienta Homotecia tracemos el homotético del punto i con respecto al punto o tomando como factor al valor 3, al punto homotético que aparece lo llamamos x, trazamos el vector $\overrightarrow{ox}$.

Trazamos el homotético del punto *j* con respecto al punto *o* tomando como factor al valor 2, al punto homotético que aparece lo llamamos *y*.

Trasladamos el punto *y* con respecto el vector $\overrightarrow{ox}$, al punto que aparece lo llamamos *2d*.

Si trazamos el vector $\overrightarrow{o2d}$ este vector seria el vector *3i* + *2j* teniendo de referencia a los factores y a los vectores $\overrightarrow{oi}$ y $\overrightarrow{oj}$ (figura 15).

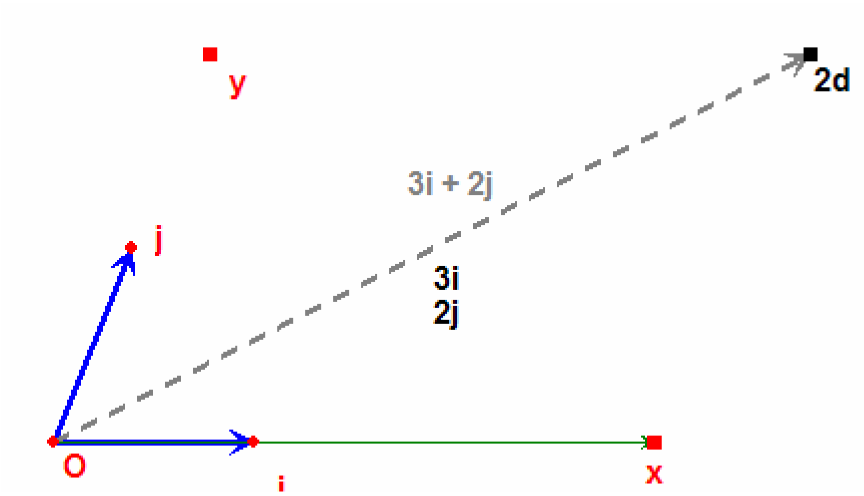


Figura 15

Construimos una macro que tenga como objetos iniciales a los vectores $\overrightarrow{oi}$, $\overrightarrow{oj}$ y a los factores 2,3 y como al objeto final al punto *2d*.

MACRO DE UN PUNTO EN TRES DIMENSIONES

Esta macro es importante ya que podemos generar y simular el espacio R^3, pero de nada serviría si no se pudiera graficar un punto en 3 dimensiones por eso la creación de esta macro.

Trazamos cuatro puntos de tal manera que con ellos se pueda trazar la forma del espacio R^3, generamos los valores 2, 1.5, 2 con la herramienta *Número*, con la macro *Punto en Dos Dimensiones* trazamos el punto *2d* con los factores 2, 1.5. Trasladamos el punto *2d* con respecto el vector $\overrightarrow{ok}$, al punto que aparece lo llamamos *z* y trazamos el vector $\overrightarrow{2dz}$ y el homotético de *z* con respecto al punto *o* tomando como factor al valor 2 (el de k), al punto homotético que aparece lo llamamos *3d*.

Si trazamos el vector $\overrightarrow{o3d}$ este vector seria el vector *2i +1.5j + 2k* teniendo de referencia a los factores y a los vectores $\overrightarrow{oi}$, $\overrightarrow{oj}$, $\overrightarrow{ok}$ (figura 16).

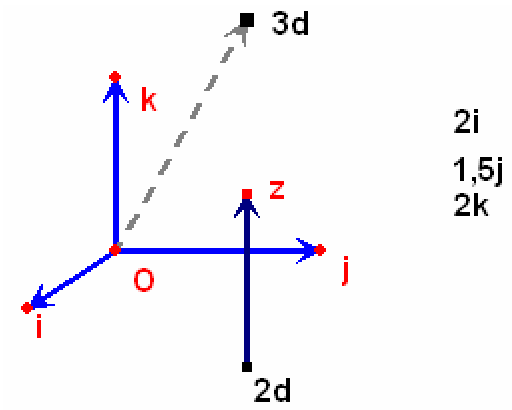


Figura 16

Construimos una macro que tenga como objetos iniciales a los vectores $\overrightarrow{oi}$, $\overrightarrow{oj}$, $\overrightarrow{ok}$ y a los factores 2, 1.5, 2 y como objeto final al punto *3d*.

CONSTRUCCIÓN DEL ESPACIO R^3

La construcción de este espacio es necesario utilizar ángulos, ya que para generar R^3 se deben usar los operadores de rotación vistos en un curso básico de *Álgebra Lineal*, por lo que es necesario utilizar como preferencia un sistema de coordenadas polares.

Generemos un eje polar con la herramienta *Nuevos ejes*, traza dos círculos concéntricos en el origen del eje polar y sobre los círculos traza los puntos *a,b* y obtén su coordenada según el sistema polar.

Si analizas las coordenadas observaras que el segundo elemento de la dos coordenadas esta en grados, estos nos serán de gran ayuda para generar el espacio.

Tracemos un punto *o* y sobre ese punto dos rectas que sean perpendiculares entre si, tracemos una circunferencia con centro en *o* y pongamos puntos de intersección *i* y *j* de las rectas perpendiculares y la circunferencia (figura 17).

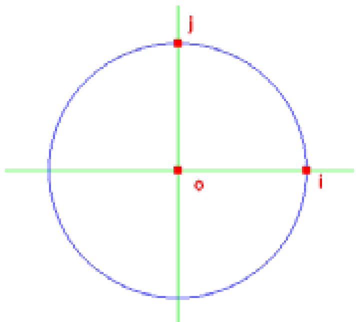


Figura 17

Tracemos los vectores $\overrightarrow{oi}$ y $\overrightarrow{oj}$, ocultemos las rectas y la circunferencia (figura 18).

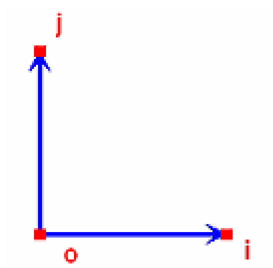


Figura 18

Para crear espacio se necesitan ángulos de Euler:

$$x = Sin\ \beta\ i - Cos\ \beta\ Sin\ \theta\ j$$
$$y = Cos\ \beta\ i + Sin\ \beta\ Sin\ \theta\ j$$
$$z = Cos\ \theta\ j$$

Con la herramienta calculadora y con las coordenadas de los puntos de los círculos concéntricos llevemos acabo las operaciones de las ecuaciones tomando al del punto *a* como θ y al de *b* como β. Con la macro *Punto en dos dimensiones* escogemos los valores de Sin[β] y *Cos[β]Sin[θ]* y por último a los vectores $\overrightarrow{oi}$ y $\overrightarrow{oj}$, al punto que aparece lo llamamos *x*. De igual forma escogemos la macro *Punto en dos dimensiones* escogemos los valores de *Cos[β]* y *Sin[β]Sin[θ]* y por último a los vectores $\overrightarrow{oi}$ y $\overrightarrow{oj}$, al punto que aparece lo llamamos *y*. Con la herramienta *Homotecia* tracemos el homotético del punto *j* con respecto al punto *o* tomando como factor al valor de *Cos[θ]*, al punto que aparece lo llamamos *z* (figura 19).

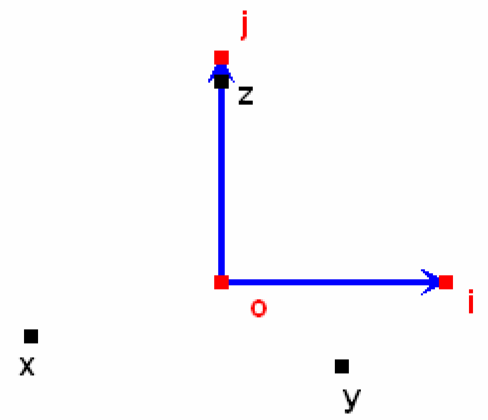


Figura 19

Ocultemos los vectores $\overrightarrow{oi}$, $\overrightarrow{oj}$ y los puntos *i, j* y Tracemos los vectores $\overrightarrow{ox}$, $\overrightarrow{oy}$, $\overrightarrow{oz}$ (figura 20).

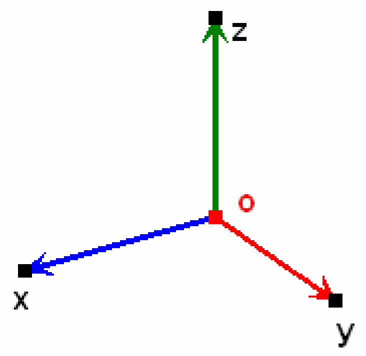


Figura 20

Si movemos los puntos *a* y *b* de las circunferencia concéntricas observamos cómo se mueve el espacio en R^3.

TRAFICACIÓN DE LA SUPERFICIE *F(X,Y) = AX² + BY² + C*

Para graficar esta superficie debemos construir tres valores que sean modificables y tener ya construido una rejilla cuadrada que pase por el punto (2,-2) y sus respectivas simetrías con los ejes y el espacio en tres dimensiones (fgura 21).

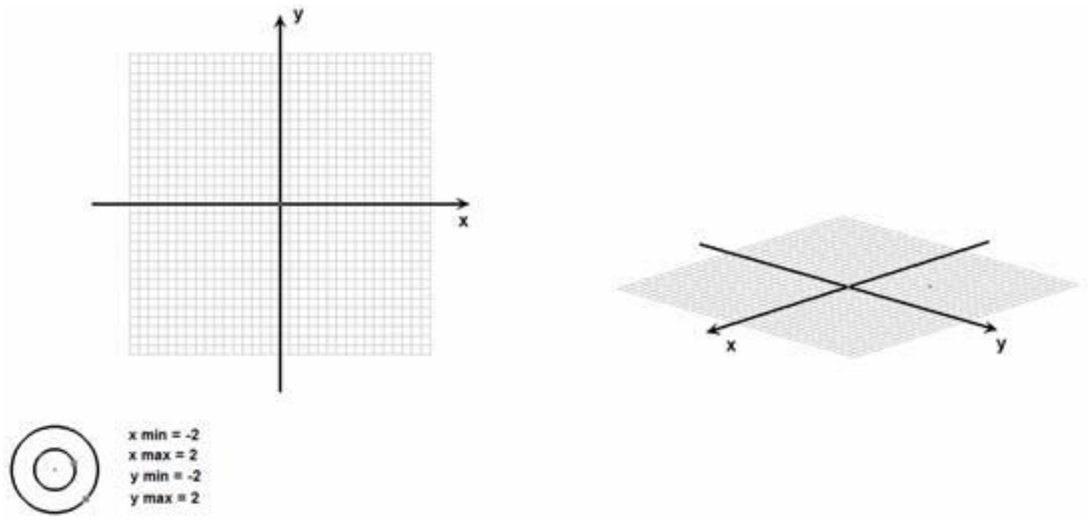


Figura 21

Ponga un punto sobre la rejilla y obtenga su coordenada y con los valores y la calculadora obtenga el valor de *z* tomando a las coordenadas de ese punto como *x* e *y* y grafique la coordenada (*x*, *y*, *z*) con la macro *Punto en Tres Dimensiones* y obtenga su lugar geométrico (figura 22).

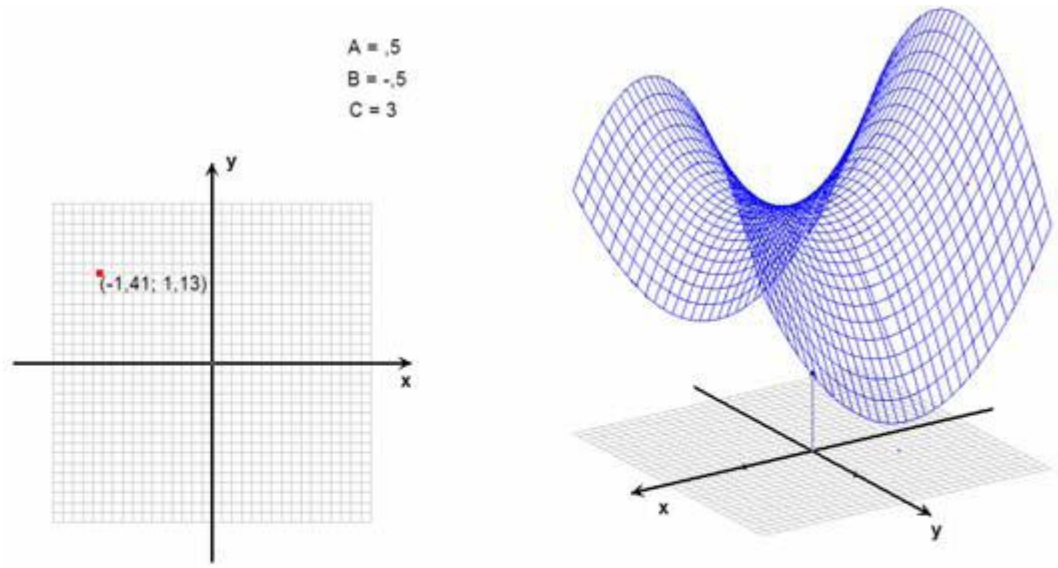


Figura 22

PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS EN EL PLANO

Editamos un segmento, con extremos *P1* y *P2*, editamos un punto sobre el segmento el cual llamaremos *t*, calculamos la distancia de *P1* a *t*. Graficamos la curva paramétrica dada por $x = ACost$ e $y = BSent$, editamos los valores $A = 4$ y $B = 2$. En la calculadora obtenemos los valores de x e y .

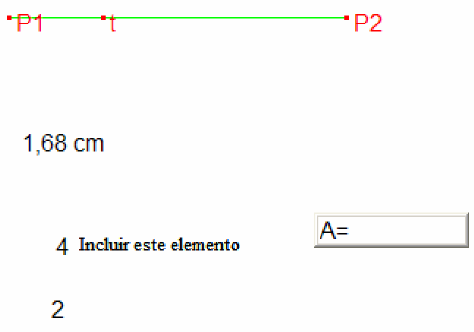


Figura 23

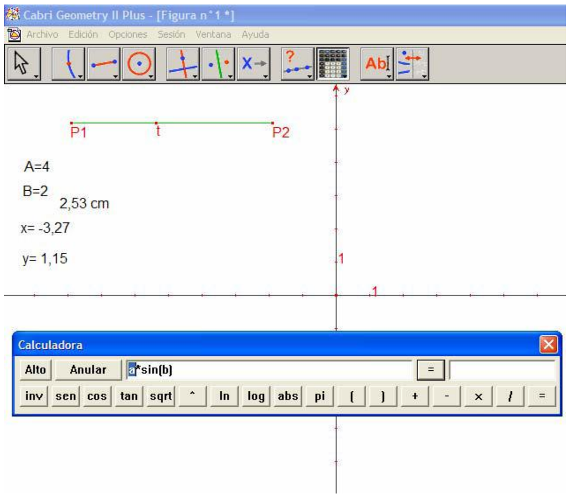


Figura 24

Con la macro *graficación en R2* selecciona los valores que calculaste x e y y el eje x, con la opción lugar geométrico (del punto obtenido con la macro *graficación en R2* con respecto al punto *t*) trazamos la curva paramétrica. Para finalizar trazamos un vector del origen al punto construido por la macro.

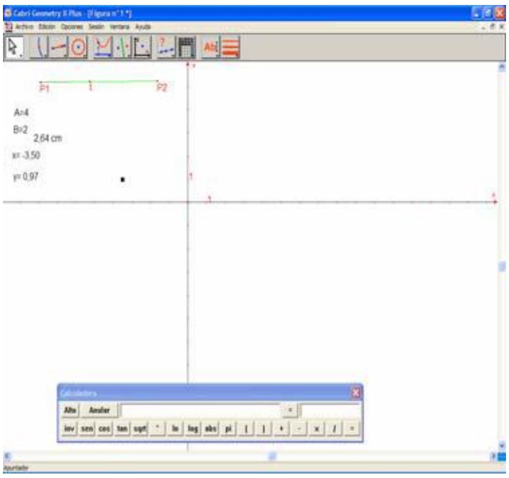


Figura 25

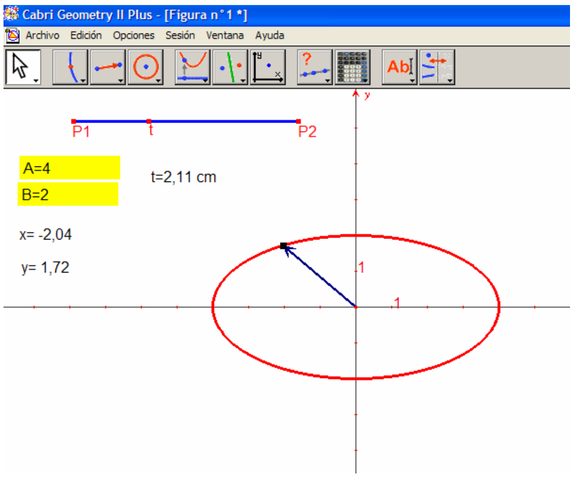


Figura 26

PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS EN EL ESPACIO

Editamos un segmento, con extremos P1 y P2, editamos un punto sobre el segmento el cual llamaremos *t*, calculamos la distancia de *P1* a *t*. El propósito es graficar la curva paramétrica en el espacio dada por $x = Cost$, $y = Sent$ y $z = t$. Realizamos las operaciones indicadas en la calculadora. En el espacio 3D construido con anterioridad y con la macro *punto 3d*, seleccionamos los valores de *x*, *y* y *z* , al punto resultante lo llamamos $r0$. En seguida pedimos el lugar geométrico de $r0$ con respecto a *t*. Para finalizar trazamos un vector del origen a $r0$ (ver figura 28).

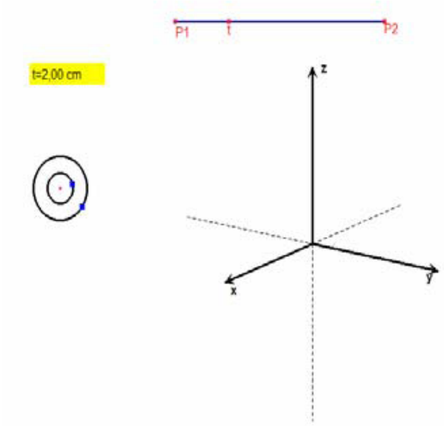


Figura 27

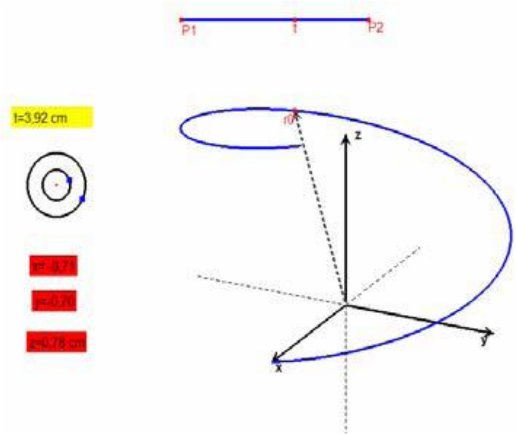


Figura 28

CAMPOS VECTORIALES

Para graficar un campo vectorial, mostramos los ejes, seleccionamos la opción punto y damos un clic sobre la pantalla y llamamos *P*, elegimos *coordenada o ecuación* del punto *P* (ver figura). Para graficar el campo vectorial $\vec{F}\ x,y = -y\hat{i} + x j$, seleccionamos la calculadora y presionamos el valor de $-y$ del punto *P*, análogamente hacemos lo mismo seleccionando el valor *x* que va ir en dirección de j .

Con la macro *graficación en R2*, seleccionamos el valor de $-y$ y enseguida el valor x (en este orden, ya que el campo vectorial es $\vec{F}\ x,y = -y\hat{i} + x j$) y por ultimo uno de los ejes, al punto que aparece le llamamos *P1*. Trazamos un vector del origen al punto *P1*.

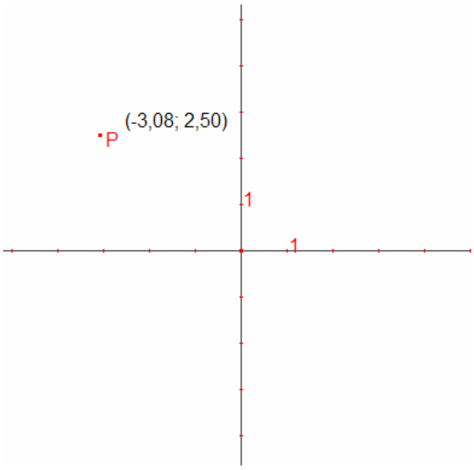


Figura 29

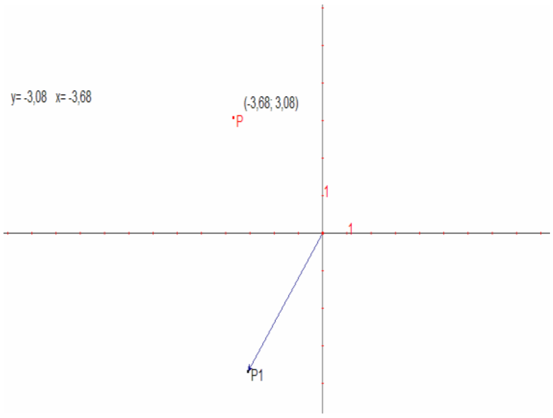


Figura 30

Con la opción traslación, seleccionamos el punto *P* y el vector $\overrightarrow{OP1}$, al punto que aparece lo llamamos *P2*, trazamos un vector de *P* a *P2*. Activamos la opción traza del vector $\overrightarrow{PP2}$ y movemos el punto *P* para obtener una gráfica del campo vectorial (figura 32).

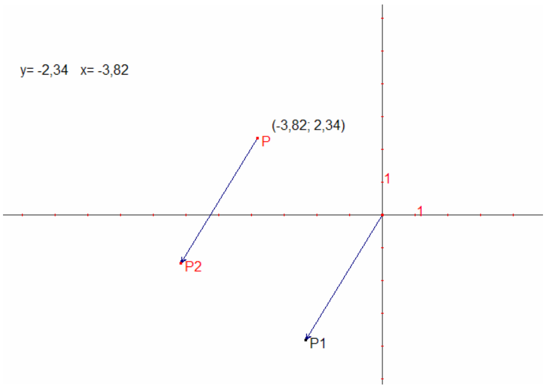


Figura 31

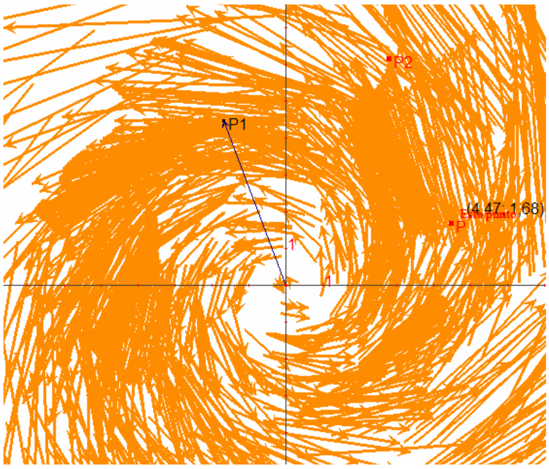


Figura 32

Otra forma de graficar un campo vectorial es con la opción lugar geométrico, en la cual es necesario tener la rejilla. A continuación se da una breve explicación:

Con la macro rejilla, construimos la rejilla que pase por los puntos $5,5$, $-5,5$, $-5,-5$ y $5,-5$. Editamos un punto *P* sobre la rejilla y realizamos los mismo pasos que en la construcción anterior con la diferencia que en lugar de presionar la opción traza seleccionamos la opción lugar geométrico del vector $\overrightarrow{PP2}$ con respecto a P (antes de presionar el lugar geométrico debemos ocultar la rejilla).

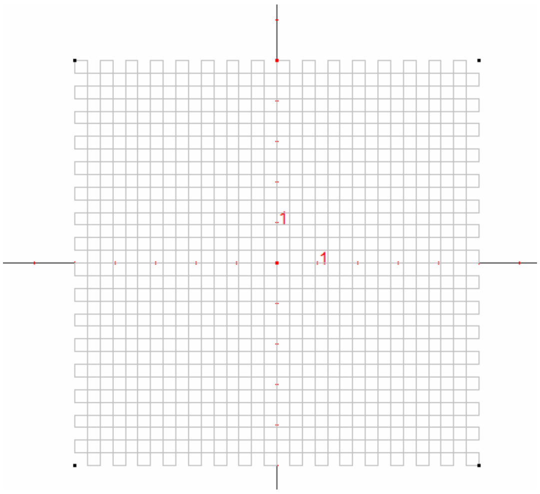


Figura 33

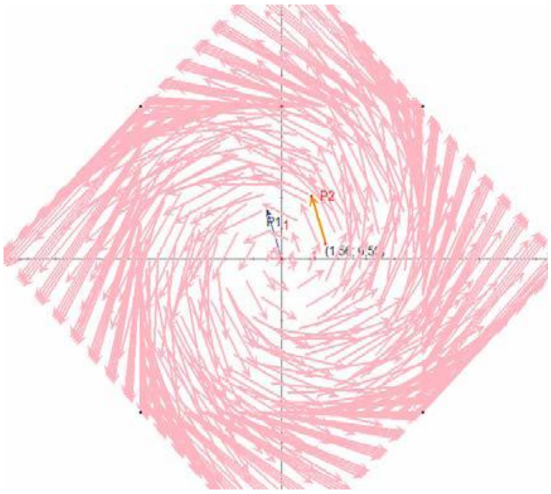


Figura 34

Con las macros obtenidas con anterioridad y algunos trazos geométricos, no es difícil obtener gráficos de temas como curvas de nivel, derivada direccional, derivada parcial, campos gradiente, por mencionar algunos. A continuación se muestran las figuras de algunos de los temas antes mencionados.

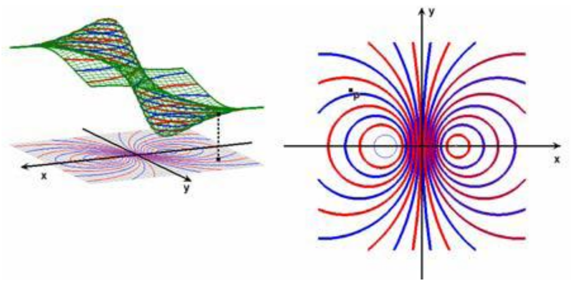


Figura 35. Curvas de Nivel

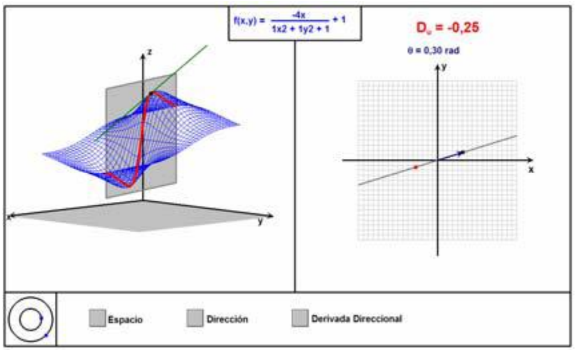


Figura 36. Derivada Direccional

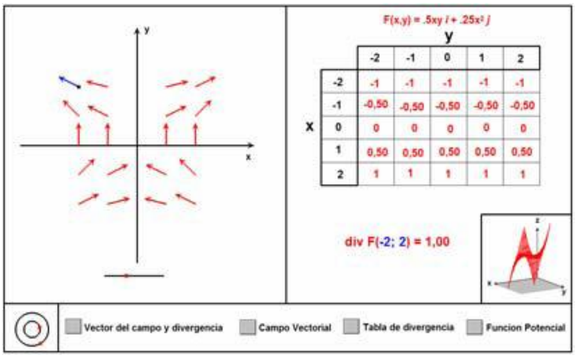


Figura 37. Divergencia

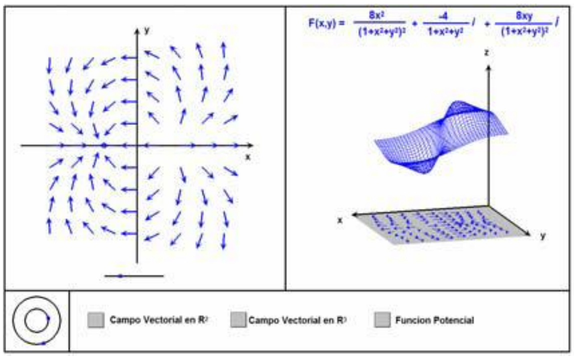


Figura 38. Campos Vectoriales y Gradiente

BIBLIOGRAFÍA

Dorier, J. (2000). *Epistemological analysis o the genesis of the theory of vector spaces*. En J. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra (pp. 3 – 81). Springer.

Duval, Raymond, (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Hitt, F. (Ed), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Hitt, Fernando, 1997. *Visualización matemática. Representaciones, nuevas tecnologías y currículum*. Revista de Educación Matemática. Vol. 10, pp. 23-45.

Sierpinska, A. (2000). *On Some Aspects Of Students' Thinking In Linear Algebra*. En J. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra (pp. 209-246). Springer.

Vinner S (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Advanced Mathematical thinking. Edited by David Tall. Kluwer Academic Publishers.