MÁS ALLÁ DEL CUADRO… GEOMETRÍA Y MOVIMIENTO

(1) Mabel Trozzoli – (2) María Teresa Ortiz – (3) Paula Corti

(1) mabeltrozzoli@yahoo.com.ar – (2) mtereortiz@fibertel.com.ar – (3) paulacorti@gmail.com

GRUPO XVIII. Investigación en Matemática Educativa de la República Argentina

GIDMAA. Grupo de Investigación y Docencia en Matemática Aplicada a la Arquitectura.

Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Universidad de Belgrano. ARGENTINA

RESUMEN

El taller toma como referente central el desarrollo investigativo sobre qué tipo de matemática necesita el arquitecto para su formación profesional; esta actividad fue realizada con un grupo de estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad de Belgrano. El trabajo consiste en la puesta en escena de una secuencia didáctica que contribuya a desarrollar el pensamiento geométrico en los estudiantes de la carrera, utilizando como herramienta el software de geometría dinámica Cabri II Plus y Cabri 3D.A lo largo de la historia ha habido vínculos permanentes entre la geometría y la pintura, hasta el punto de que las representaciones visuales solían ser el fundamento de las investigaciones geométricas. Además, el uso de la tecnología como mediadora en los procesos de enseñanza-aprendizaje nos permite diseñar situaciones didácticas que propician el entrenamiento de ciertas habilidades cognitivas de forma más eficaz.A partir de la observación y reconocimiento de estructuras matemáticas en un cuadro de Víctor Vasarely, se trabajará en la generación de la curva astroide, como la envolvente de una familia de elipses cuya suma de semiejes es constante. La posterior visualización de esta familia en el espacio permitirá su reconocimiento como generatrices de un conoide. Destacamos que, el estudio de la Forma extendida al espacio, permite vincular estrechamente lo abstracto con lo concreto, a la vez que actúa como inspiradora de nuevas miradas y producciones en el campo de la Arquitectura.

MARCO TEÓRICO

Según el enfoque planteado por Guy Brusseau, en el proceso de enseñanza aprendizaje intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y medio didáctico. En este contexto, una situación didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre estos tres elementos donde el medio didáctico no representa una entidad pasiva, sino que es el espacio proporcionado por el docente donde el estudiante construye su conocimiento.

METODOLOGÍA

La experiencia se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de primer año de la carrera de Arquitectura, a los cuales se les propuso una actividad que, siendo un tema perteneciente a la currícula, permitió profundizar sobre ciertos conceptos geométricos. Se trabajó en ambiente lápiz y papel en la fase de exploración, formulación y en ambiente TIC's en la fase de conjetura y formalización. Se utilizó el software Cabri II Plus y Cabri 3D.

La fase de exploración y formulación consistió en un trabajo en grupo, que permitió a los estudiantes compartir experiencias en la construcción del conocimiento. Si bien esta etapa se lleva a cabo sin la intervención del docente, es éste el que plantea los problemas y enfrenta a los estudiantes con ese medio didáctico.

El objetivo fundamental es desarrollar, en los estudiantes, la motivación hacia el objeto del aprendizaje e incrementar el interés por la asignatura Matemática, dentro de un contexto relacionado fundamentalmente con el arte y la tecnología. "El tipo de comunicación del medio artístico es apto para expresar intuiciones y compresiones no verbales de nosotros mismos y de nuestras potencialidades, es el complemento necesario del lenguaje verbal y del lenguaje matemático, para poder comunicar los distintos tipos de información sobre el mundo." [1]

DESARROLLO DEL TALLER

Al igual que lo trabajado con los estudiantes, se presentará un resumen de la obra de Vasarely en un video donde se hará referencia a las características del arte de período, posteriormente se trabajará con una de las obras de la serie *Vega*, Fig.1

En la década del 60 el artista plástico Víctor Vasarely asumió la tarea de dar forma poética a los secretos de la ciencia moderna. Es por tanto consecuente que en su arte óptico-cinético desempeñen un papel central las ideas del espacio y el movimiento. Sus obras reflejan el cambio y la velocidad de nuestro entorno, exponiendo al observador a estructuras que generan movimiento. El Op-Art. es una modalidad del arte cinético donde el movimiento no es real sino producto de ilusiones ópticas. Entre otros reconocidos artistas que trabajaron este estilo se encuentran: Bridget Riley (Inglaterra), Jesús Rafael Soto (Venezuela), Kenneth Noland (EEUU), Julio Le Parc (Argentina).

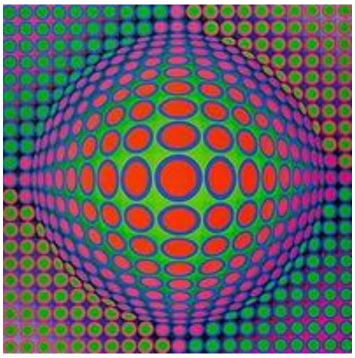


Figura 1. Vega 200**, 1968- Víctor Vasarely**

RESUMEN DEL TRABAJO CON LOS ESTUDIANTES:

Sobre la obra mencionada, y con un calco superpuesto que les permitió explorarla gráficamente, se les pidió a los estudiantes que lo describan utilizando estructuras matemáticas reconocibles, ayudados por un cuestionario guía no excluyente en cuanto a las posibles exploraciones:

1. ¿Si tuvieras que describir esta obra a una persona que no la tiene a la vista, cómo lo harías?
2. ¿Qué elementos vinculan las estructuras descriptas entre sí?
3. Si modificamos la posición del observador, ¿variaría la descripción hecha?
4. ¿Se podrían descubrir sub-estructuras?

RESUMEN DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES:

5. En la descripción, se hizo referencia a la presencia de una circunferencia interior a un cuadrado y a la lectura de una cuadrícula que contenía círculos (como repetición del mismo esquema general) pero, que los mismos sólo se veían como tales en el plano que contenía al cuadrado y en el que se encuentra en un plano perpendicular al ojo del observador, por lo tanto paralelo al plano del cuadrado. Los demás, por efecto de la perspectiva, se veían como elipses.

   La totalidad hizo referencia al efecto "elástico" del material que permite la lectura de ese círculo como una esfera. Fig.2 y Fig.3

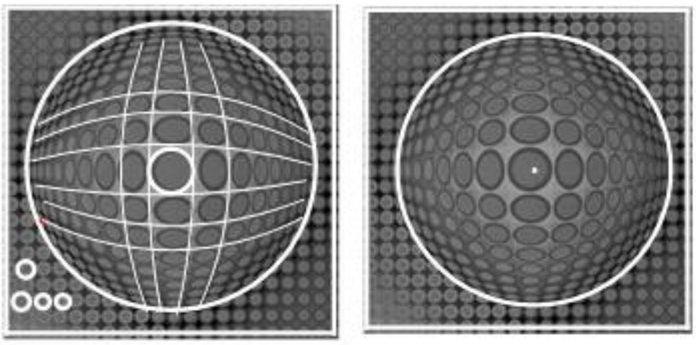


Figura 2 y 3

6. Algunos comentaron que la vinculación se daba por una deliberada intensión del artista en la cual el círculo parecería "tocar" al cuadrado en los puntos medios de sus lados, dada la particularidad de la definición de color y forma de esos puntos de tensión en la obra, (tangencia entre ambos). Fig. 4

   Otros indicaron que la vinculación estaba dada por la aparición de la circunferencia pequeña que se iba "transformando" hasta identificarse con el cuadrado perimetral. Fig. 5

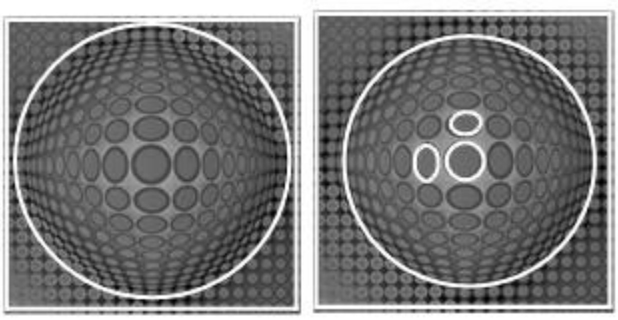


Figura 4 y 5

7. La totalidad del grupo hizo referencia a la simetría de la obra que permitía la misma lectura desde diferentes puntos de vista. Se reconocieron ejes perpendiculares.
8. La respuesta a la percepción de sub-estructuras fue variada y permitió el debate a partir del intercambio de las conjeturas que sostenían cada posición, por ejemplo:

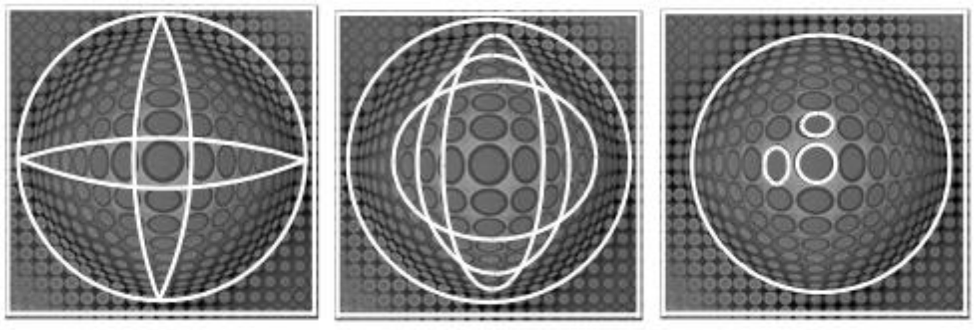


Figura 6, 7 y 8

Fig.6 – La circunferencia central y las elipses que se generan a partir de ella: hay un reconocimiento de que la transformación que sufre la circunferencia hacia ambos lados tiene una proporción determinada y no es arbitraria. Esta transformación se realiza sobre ejes perpendiculares, (sugieren homotecia).

Fig.7 – Reconocimiento de curvas ahusadas que envuelven la familia de curvas elípticas.

Fig.8 – Exploración de curvas cerradas que envuelven grupos de elipses que por sus características, permiten la lectura esférica.

Durante la puesta en común apareció una constante en el discurso de los estudiantes. Todos coincidían en la existencia de una transformación de una circunferencia en diferentes elipses, tanto en su percepción individual como en la lectura de curvas envolventes, a la vez que coincidían en que la transformación obedecía a una lógica determinada, que no era arbitraria.

ACTIVIDAD DE LOS TALLERISTAS ASISTENTES (PRIMER DÍA)

Se les presenta a los asistentes un archivo el cual representa una varilla que se desplaza manteniendo cada uno de sus extremos apoyados sobre dos perpendiculares

Explorarán el archivo desplazando:

- el punto P y
- el punto N sobre el segmento x, Fig.9

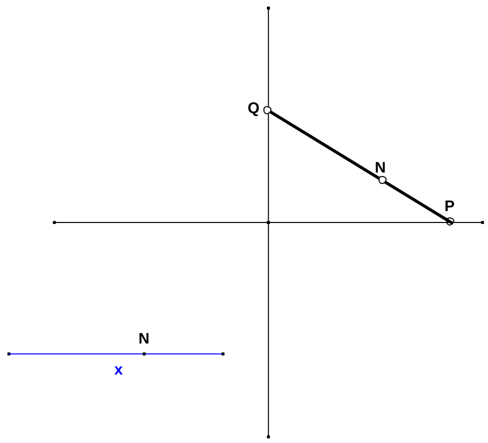
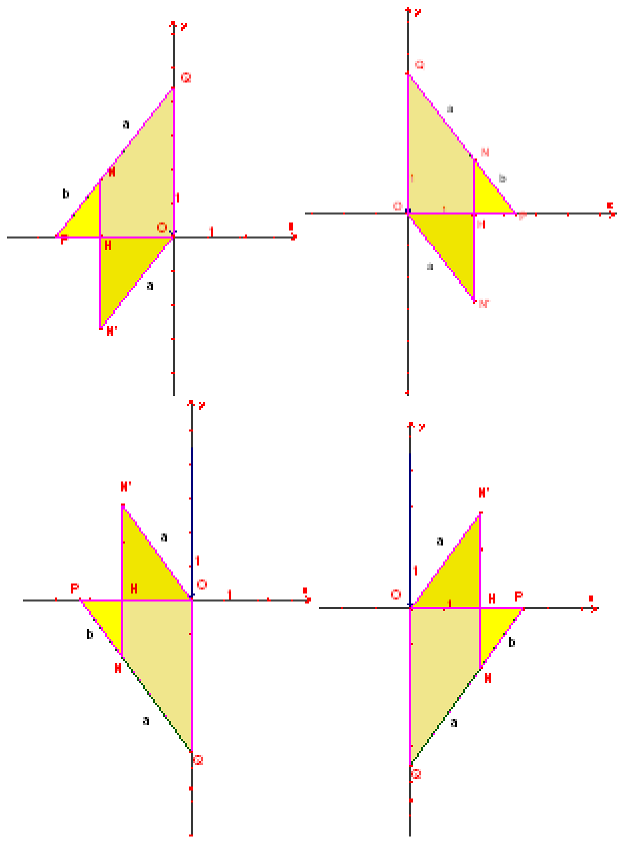


Figura 9

¿Por qué se está desplazando?, ¿Qué se pone en juego en este desplazamiento? , ¿Cómo se apropian del concepto matemático?

Cualquier punto de la varilla, cuando ésta se desplaza apoyando sus extremos en los ejes perpendiculares, describe una elipse.



Aplicando traslación de vector QO al punto N, se obtiene N'.

Resultando QON’N paralelogramo donde a = QN = ON’.

Triángulo NHP homotético con N’HO, según razón: HN/HN’= -b/a y centro H.

Al deslizarse los extremos P y Q de la varilla sobre las rectas perpendiculares, N’ conserva la condición de pertenencia a la circunferencia de centro O y radio a.

Si se considera la circunferencia de centro O y radio a, su imagen por afinidad de razón –b/a es la elipse de semiejes a y b.

En esta afinidad al punto N (x , y) le corresponde el punto N' (x',y').

Ecuaciones de la afinidad: $x = x'$

$y = -a/b\ y'$

Dada la circunferencia: $x^2 + y^2 = a^2$

Aplicamos la afinidad $(x')^2 + (-a/b\ y')^2 = a^2$

Resulta la ecuación de una elipse de semiejes a y b

$(x')^2 / a^2 + (y')^2 / b^2 = 1$

Resulta entonces que, partiendo de la circunferencia de radio a, puede obtenerse la elipse aplicando una afinidad ortogonal de razón –b/a.

Desde un enfoque sintético: aplicar una afinidad ortogonal de eje e y razón k a un punto a, consiste en proyectar ortogonalmente a sobre el eje e (obteniendo a_1) y aplicar la homotecia de centro a_1 y razón k al punto a. De esta manera obtenemos al punto a’, afín del punto a.

El tipo de afinidad que estamos trabajando podría expresarse:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = xT\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yT\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{b}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{b}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Investigaremos entonces, qué pasa si varía esta razón.

A partir del arrastre del punto sobre el segmento, el cual modifica la relación entre semiejes, se reconocen invariantes.

¿Cómo podemos visualizar toda la familia de elipses? La posibilidad que el programa nos da de pedir lugar geométrico como envolvente nos permite, además, visualizar la curva Astroide Fig. 13 y Fig. 14.

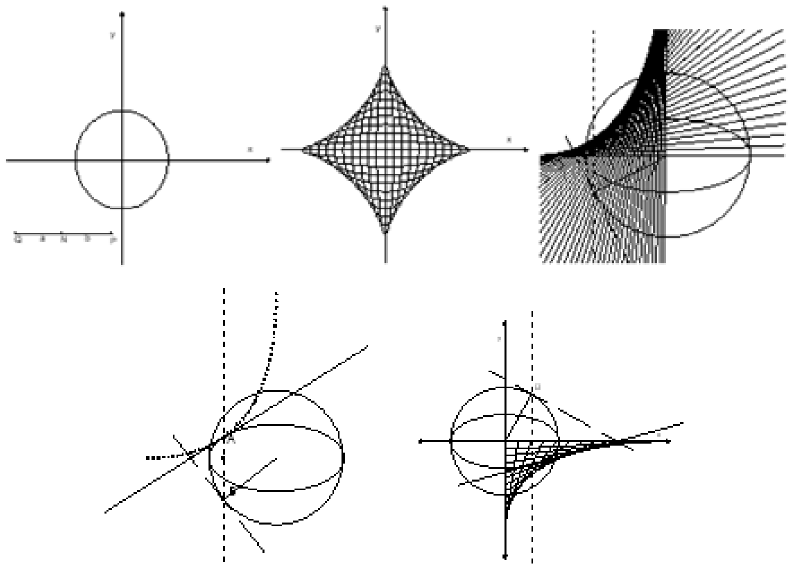


Figura 11, 12, 13, 14 y 15

O visualizar el lugar geométrico de las tangentes a las elipses, y descubrir sorprendentemente que son comunes a la curva Astroide Fig.15.

ACTIVIDAD DE LOS TALLERISTAS ASISTENTES (SEGUNDO DÍA)

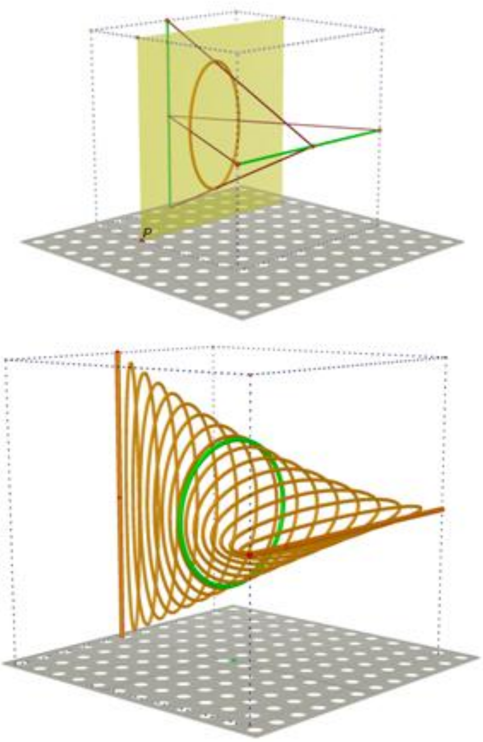
La arquitectura es un arte que trabaja en tres dimensiones, el espacio es el gran protagonista de la misma, la pintura actúa en dos dimensiones, aunque pueda sugerir tres o cuatro. Atendiendo a este concepto, se les propone a los asistentes trasladar esta construcción al espacio tridimensional.

Si esta familia de elipses cuya suma de semiejes es constante se desarrollara en el espacio tridimensional, ¿qué tipo de superficie determinará?

Construiremos la familia de elipses considerando como ejes perpendiculares espaciales las bases medias de dos caras opuestas de un cubo.

La posibilidad de visualizar estas superficies facilita la comprensión de las mismas y constituye una forma de tender un puente entre la abstracción y sus aplicaciones prácticas.

El estudio posterior de la superficie obtenida, un conoide, abre un campo de infinitas posibilidades arquitectónicas tanto formales como estructurales.



Familia de elipses en el espacio. Conoide

CONCLUSIONES

Abordar conceptos geométricos a partir de cuestiones relacionadas con el Arte permite a los alumnos sensibles al Arte, entender Geometría, considerando sobre todo que éste es el gran exponente de la capacidad visual-espacial. Henri Poincaré confirma este hecho, ya que para él… "los verdaderos matemáticos experimentan un verdadero sentimiento estético, se trata de sensibilidad".

La matemática, además, ha encontrado un nuevo soporte de expresión a través de la informática. Ésta ha hecho posible visualizar algunos problemas conocidos, comprender cómo resolverlos y, a veces ayudar en nuevas representaciones, especialmente en geometría.

Es una especie de nuevo renacimiento, los matemáticos y los artistas se han lanzado en una cooperación inédita utilizando lo que se denomina la visualización matemática. Bien sabemos que en el Renacimiento no era fácil distinguir entre una artista y un matemático.

En este contexto el papel de la geometría dinámica es fundamental. En primer lugar las imágenes llaman la atención, despiertan el interés, llevan a la reflexión sobre algunos conceptos matemáticos y ayudan a comprender los mismos, incrementando las potencialidades de los estudiantes. Nos permite, fundamentalmente, trabajar con la situación de acción, con la de formulación y validación; no se trata sólo de institucionalizar el saber, ni de ofrecer a los estudiantes el conocimiento acabado, las fórmulas o los resultados, sino que se trata de ponerlos en contacto con la construcción de ese conocimiento. En esta dirección, el propósito finalmente es que el estudiante asuma, integre, comprenda plenamente los conocimientos y aprenda a enfrentarse a situaciones nuevas.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Courant, R.; Robbins, H. (1963). *¿Qué es la Matemática?* Ed. Aguilar.

Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de geometría*. Ed. Limusa.

Doberti, R. (2003). *Lógica y Técnica de la Forma*. Publicaciones FADU- UBA.

Elsen, A. (1971). *Los propósitos del Arte*. Ed. Aguilar.

Hilbert, D.; Cohn-Vossen (1952). *Geometry and the Imagination*. NY.

Le Shan; Margenau (2002). El espacio de Einstein y el cielo de Van Gogh.

Rabardel (1995). Teoría de la Génesis Instrumental.