LA HELENA DE LA GEOMETRÍA

(1) Sabrina Alarcón– (2) Ariel Amadio – (3) Marcela Bottazzini – (4) Zulma Bretón –

(5) Soraya Buccino – (6) Pablo Viveros

(1) sabrinaalarcon17@yahoo.com.ar – **(2)** aru_amadio@yahoo.com.ar –

(3) marcelabottazzini@yahoo.com.ar – **(4)** zulma_bret@yahoo.com.ar –

(5) soraya_buccino@yahoo.com.ar – **(6)** pcv152@yahoo.com.ar

Universidad Tecnológica Nacional. ARGENTINA

RESUMEN

Debido al gran desarrollo de la informática, la práctica educativa realiza esfuerzos permanentemente por incorporar las nuevas tecnologías a las aulas. En este proyecto se han desarrollado, con la ayuda de Cabri, una propuesta didáctica que le permitan al alumno a través de la exploración y el uso del software reproducir el proceso histórico que llevo al hombre a descubrir las propiedades de la curva cicloide.

INTRODUCCIÓN

Las nuevas tecnologías imperantes hacen necesario replantear nuestras prácticas pedagógicas.

El soporte informático juega un papel importante debido a su potencia visual, ayudando a la construcción de los conceptos matemáticos, y debido a la facilidad para realizar cálculos, permite que el alumno pueda centrarse en la exploración y el debate (Turégano Moratalla, 1998). También puede plantear interrogantes, conjeturar, argumentar y explicar desde distintos *marcos conceptuales* (Duady, 1984).

Adherimos tanto a la Teoría de las Situaciones de Brousseau como a la Educación Matemática Realista de Freudenthal, en las que se concibe a la matemática como una actividad humana a la que todos pueden acceder y en la que importa la actividad misma y no solo los resultados. Freudenthal utiliza el término matematización, refiriéndose a que hacer matemática es más importante que aprenderla como un producto terminado.

Otro de los aspectos que consideramos relevantes, en nuestro trabajo, de la teoría de las de Freudenthal es el principio de realidad, el que considera que el aprendizaje matemático debe originarse en la realidad. Mantener la matemática conectada al mundo real. Es decir, presentar problemas en contextos de la vida.

Consideramos la historia de la matemática como una manera de conservar el sentido al mismo tiempo que estructura el pensamiento matemático del alumno de forma global, coherente y rigurosa. Ya que se sitúa a la matemática, y a su enseñanza, dentro de la historia. Entonces, el sentido y el rigor ya no son absolutos, contradictorios o inaccesibles sino que se construyen a través de la interacción al mismo tiempo que se estructura el pensamiento del alumno en un proceso dinámico y vital. (Jean-Pierre Friedelmeyer)

Debido a que las herramientas tecnológicas facilitan a los alumnos la adquisición de habilidades para desarrollar sus capacidades de conjeturar, construir, argumentar y comunicar, nuestro trabajo se basa en la construcción y análisis de las propiedades de la cicloide utilizando como recurso principal el software Cabri.

DESARROLLO DEL TALLER

En la primera actividad se pretende estudiar el recorrido de un punto perteneciente a un polígono regular, como un vértice por ejemplo, que rueda sobre una recta sin deslizar o resbalar (Fig. 1).

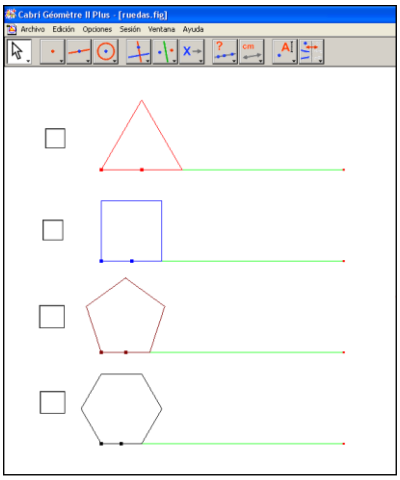

Figura 1

Se pretende a partir de esta actividad ver que a medida que vamos aumentando el número de lados del polígono, el lugar geométrico que describe uno cualquiera de sus vértices es una curva que tiende a suavizarse a medida que aumentamos el número de lados (partiendo de un triángulo hasta llegar a un hexágono), podríamos seguir con este procedimiento tendiendo a infinitos lados y entonces encontramos la circunferencia como límite de dichos polígonos y la cicloide como límite de dichas curvas. (Fig. 2).

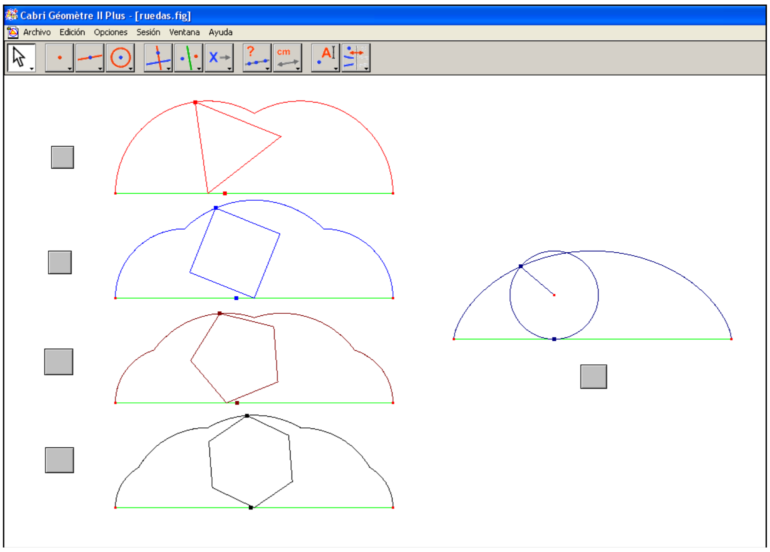

Figura 2

En el espacio también se puede obtener la cicloide. Si hacemos rodar una lata sobre un plano siguiendo una trayectoria rectilínea, y consideramos un punto fijo sobre el borde de la tapa, también obtenemos la curva antes mencionada, pero ahora en Cabri 3D (Fig. 3).

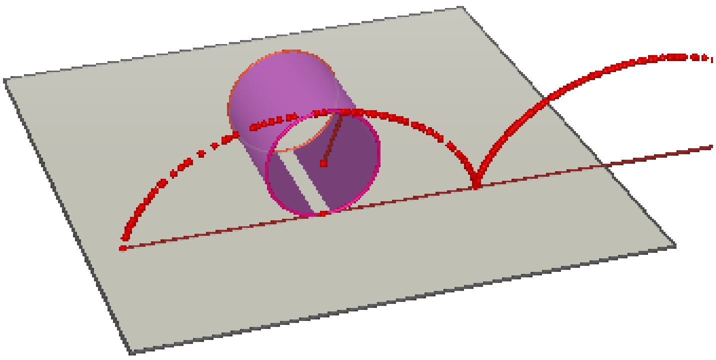

Figura 3

LA HELENA DE LA GEOMETRÍA

A causa de las continúas disputas entre los matemáticos del siglo XVII la cicloide fue denominada "La Helena de los Geómetras".

Galileo estudió la cicloide en el año 1632 estudió la curva y fue el primero en darle el nombre con la que la conocemos hoy. Galileo intentó hallar el área bajo uno de sus arcos. Lo mejor que pudo hacer fue trazar la curva sobre una chapa homogénea, recortar la parte encerrada bajo un arco y pesarla. Llegando a la conclusión de que este área era probablemente un poco menor que tres veces el área del circulo encerrado.

Hacia 1634 Roberval mostró que el área de la región de un bucle de cicloide era tres veces el área correspondiente a la circunferencia que la genera. Descubrió un método para trazar la tangente a la cicloide en uno cualquiera de sus puntos, problema que también resolvieron, más o menos a la vez, Fermat y Descartes.

Torricelli también estudió la cicloide. Publicó un libro, al que añadió como apéndice tanto la cuadratura de la cicloide como la construcción de la tangente, Torricelli no hacía ninguna referencia en su obra al hecho de que Roberval había llegado a estos mismos resultados antes que él, y por lo tanto Roberval acusó a Torricelli de plagio.

Blas Pascal lanza un desafío a los matemáticos proponiendo determinar la longitud de un arco de la cicloide así como su centro de gravedad y la superficie del volumen de revolución que engendra el área plana que barre el arco de cicloide al girar ya sea entorno al eje de las abscisas, o entorno al eje de las ordenadas, o bien, en torno al eje de simetría del arco de cicloide. Ofreciendo un primero y un segundo premios por su solución, y proponiendo a Roberval como uno los jueces del concurso. La publicidad dada y el plazo de recepción de soluciones fueron tan desafortunados que Pascal no otorgó ninguno de los dos premios y decidió publicar sus propias soluciones.

En esa misma época, Christiaan Huygens inventó el reloj, se le ocurrió estudiar qué ocurriría si se sustituyera el recipiente semiesférico por otro engendrado por la cicloide invertida girando alrededor de su eje de simetría y comprobó que para ese recipiente una bolilla alcanzaría el punto más bajo exactamente en el mismo tiempo, independientemente de la altura del punto del interior del recipiente en que se abandone la bolilla.

Por esta propiedad de la cicloide se dice que es una curva tautócrona; quiere decir que un objeto abandonado a su propio peso sobre un arco de una cicloide invertida y sin rozamiento se desliza desde cualquier punto al punto más bajo exactamente en el mismo tiempo independientemente del punto de partida del movimiento.

Sin embargo quedaba por resolver, un problema difícil: ¿Cómo puede uno conseguir un péndulo que oscile siguiendo un arco cicloidal en vez de circular? En la solución de este problema hizo Huygens otro descubrimiento de una gran belleza, si el péndulo de un reloj oscilase entre guías cicloidales, entonces seria verdaderamente isócrono es decir que es un movimiento de igual duración.

Las investigaciones de Huygens le condujeron a un descubrimiento de gran importancia matemática: la involuta (llamada también envolvente) de una cicloide es otra cicloide igual, o, inversamente, la evoluta de una cicloide es otra cicloide igual a ella.

Para poder visualizar estas propiedades descubiertas por Huygens, se mostrará en el Taller, un video de una experiencia que se llevo a cabo en una escuela industrial en la que los alumnos construyeron un prototipo del reloj de péndulo de Huygens (Fig. 4) se filmó el mismo en funcionamiento, se tomaron los tiempos y se analizaron las propiedades haciendo una captura de pantalla y un montaje para verificar las propiedades en Cabri. (Fig. 5).

Figura 4

Figura 5

Se les enseña a construir una macro que se adapte a cualquier dimensión que tenga el reloj (Fig. 6).

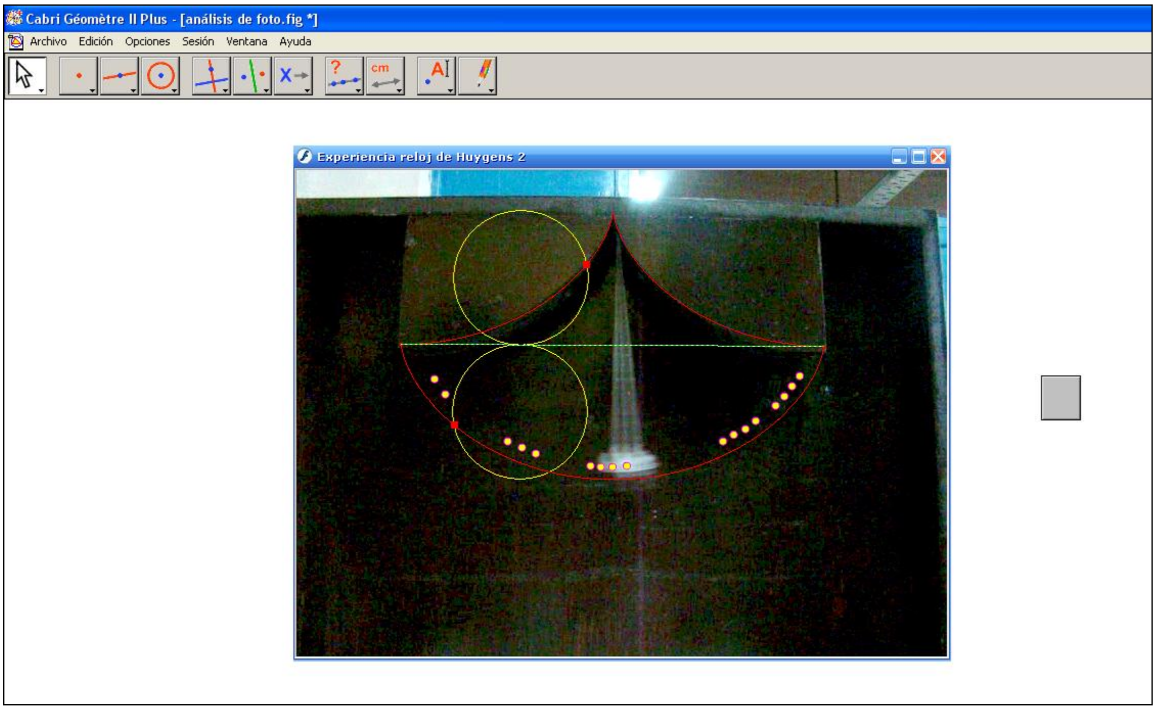

Figura 6

Para finalizar, se ampliará el estudio al análisis de las curvas que se generan con el rodamiento de una circunferencia sobre otra sin deslizamiento, siguiendo el estudio realizado por Roger Cuppens.

En este actividad (Fig. 7) se podrá observar el recorrido del punto P, perteneciente a la circunferencia c’ (color verde), mientras esta última rueda sin deslizarse sobre la circunferencia c (color azul).

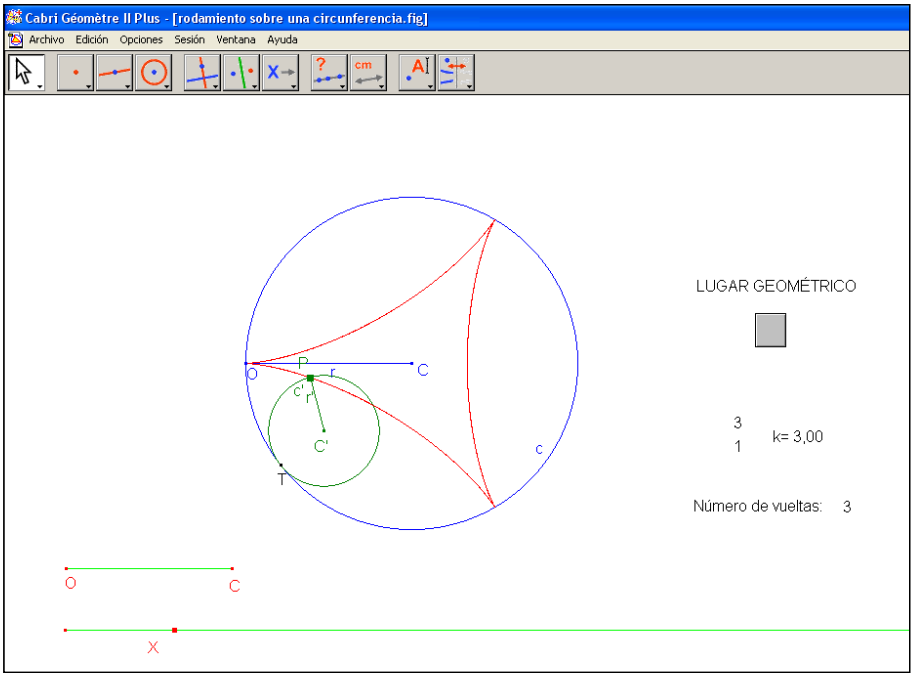

Figura 7

Las distintas curvas descriptas por el lugar geométrico del punto P, van a depender de una constante k, que resulta del cociente entre los radios de las circunferencias $\left(k = \dfrac{r}{r'}\right)$.

Dependiendo de esta constante se puede observar:

- Cuando $k > 1$, las curvas descriptas (determinadas) serán hipocicloides.
- Cuando $0 < k < 1$, las curvas descriptas (determinadas) serán epicicloides interiores $r' > r$
- Cuando $k < 0$, las curvas descriptas (determinadas) serán epicicloides exteriores $r' < r$

Se realizara un análisis de las distintas curvas descriptas por P, cuando k perenne a los distintos conjuntos numéricos.

Por ejemplo en la Figura 8 se indica la curva descripta por P, cuando k es una aproximación de $\sqrt{2}$.

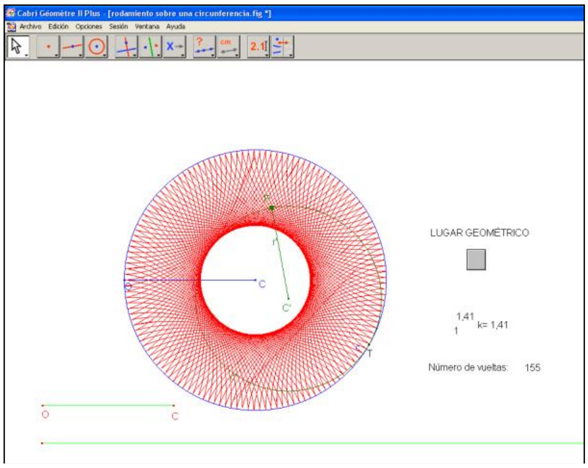

Figura 8

Una curiosidad a analizar es la propiedad existente entre los distintos valores de la constante k que determinan las mismas curvas. Por ejemplo $k=-2$ y $k=\frac{2}{3}$ que generaron una nefroide. Esta relación verifica $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=1$.

BIBLIOGRAFIA

ALAGIA, H.; BRESSAN, A.; SADOVSKY, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática.* Buenos Aires: Editorial Del Zorzal

BROUSSEAU, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática.* Córdoba: Serie B. Trabajos de Matemática, FAMAF, UNC

DOUADY, R. (1984). *Tesis doctoral.* París

FRIEDELMEYER, J. (2001). La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y las prácticas. . Ed. Blanchard

JOHSUA, S.; DUPIN , J. (1993). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática.* Buenos Aires: Editorial Colihue

LABORDE, C. ; VERGNAUD, G. Aprendizaje y didáctica. 3º parte: El aprendizaje y la enseñanza de la matemática