GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS Y OTRAS RELACIONES EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

(1) Eduardo Polanía Ramírez – (2) Eugenio Therán – (3) José Danilo Agudelo

(1) Kalao1960@hotmail.com – (2) etheran2000@yahoo.com.mx –

(3) Jagudelo801@hotmail.com

(1) Institución Educativa Juan Bautista La Salle – (2) Normal Superior de Corozal de Sucre – (3) Institución Educativa Normal Nacional de Granada Meta. COLOMBIA

RESUMEN

Con el auge de las tecnologías de la información han surgido nuevas herramientas para el trabajo tanto en geometría como en su enseñanza que es importante conocer y utilizar para poner a tono nuestros métodos pedagógicos con las nuevas posibilidades de aproximación cognitiva que la sociedad nos brinda. En particular los programas de geometría dinámica han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación. El taller consta de tres sesiones dirigidos a docentes que laboran en la educación secundaria y está orientado a profundizar en la generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos; en la primera sesión se plantea la construcción de un árbol pitagórico del tipo III, explora la relación entre las hipotenusas que resultan a medida que el árbol crece y la relación que existe entre las áreas de los cuadrados que resultan sobre los lados del triángulo isósceles rectángulo o escaleno rectángulo. En la segunda sesión se explora el teorema de Pitágoras, no solo con la construcción tradicional (cuadrados), sino intentando con otros polígonos regulares (pentágonos y hexágonos) o semicírculos, triángulos equiláteros, sobre cada uno de los lados de un triangulo rectángulo. En la tercera sesión se explora el teorema de Pitágoras, con polígonos irregulares sobre cada uno de los lados de un triangulo rectángulo para determinar las relaciones entre las áreas de estos polígonos.

INTRODUCCIÓN

El Teorema de Pitágoras, de mucha trascendencia en la matemática euclidiana, en especial, para la resolución de problemas de agrimensura, topografía, astronomía, física, ingeniería y de la matemática escolar misma, cobra vital importancia en la Geometría Analítica para determinar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuando se conocen sus dos catetos o, hallar un cateto, cuando se conocen su hipotenusa y el otro.

El matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927 *The Pitagoream Proposition*. En ese mismo libro, Loomis clasificaría las demostraciones en cuatro grandes grupos: las **algebraicas**, donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo; **geométricas**, en las que se realizan comparaciones de áreas; **dinámicas** a través de las propiedades de fuerza, masa; y las **cuaterniónicas**, mediante el uso de vectores.

Este taller es parte de una propuesta de enseñanza aprendizaje explorada en el aula de clases con estudiantes de noveno grado entre los 14 y 16 años, ligada a una visión del aprendizaje de las matemáticas en el que la exploración, la creación, la formulación de conjeturas, la validación, la sistematización la comunicación y la argumentación juegan un papel importante y en el que las nuevas tecnologías se convierten en un laboratorio de experimentación, resultado de la experiencia en el proceso de incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de la matemática.

OBJETIVOS

- Construir polígonos regulares sobre los lados de un triángulo rectángulo utilizando las potencialidades del programa CABRI para explorar las relaciones entre las áreas de estos polígonos.
- Explorar el teorema de Pitágoras, no solo con la construcción tradicional, sino intentando con otros polígonos regulares y polígonos irregulares, sobre cada uno de los lados de un triangulo rectángulo.
- Explorar la relación entre el área del cuadrado mayor y la suma de las áreas de los cuadrados pequeños construidos sobre un triangulo rectángulo a través de representaciones graficas, tabulares y algebraicas.
- Explorar la relación entre el área del cuadrado mayor y la suma de las áreas de los cuadrados pequeños construidos sobre un triangulo rectángulo a través de representaciones graficas, tabulares y algebraicas.
- Encontrar otras relaciones de triángulos rectángulos en los árboles Pitagóricos del Tipo III
- Explorar el teorema de Pitágoras, con polígonos irregulares sobre cada uno de los lados de un triangulo rectángulo para determinar las relaciones entre las áreas de estos polígonos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Se recomienda un manejo básico de Cabri Géomètre.

PROGRAMACIÓN:

Primer día: Construcción de árboles pitagóricos del tipo III.

Segundo día: Relaciones entre las figuras planas semejantes y el teorema de Pitágoras.

Tercer día*:* El teorema de Pitágoras y los polígonos irregulares.

PRIMERA SESIÓN

CONSTRUCCIÓN DE ÁRBOLES PITGÓRICOS DEL TIPO III

EL UNIVERSO DE LOS FRACTALES

El término fractal fue incorporado por Benoît Mandelbrot, en 1975, para describir las formas complejas de la naturaleza, ya que con la sola ayuda de la geometría euclidiana, no se pueden explicar algunas formas tales como: ramificaciones arbóreas, rocas, montañas, nubes, sistema neuronal etc. Entre las ramificaciones arbóreas tenemos una clase de fractales llamados "árboles pitagóricos", cuya construcción se realiza aplicando el teorema de Pitágoras repitiéndose indefinidamente.

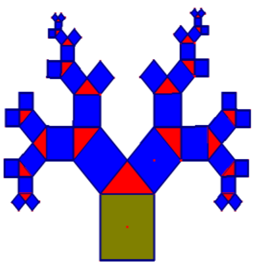


Figura 1.
Árbol pitagórico isósceles rectángulo. Tipo I

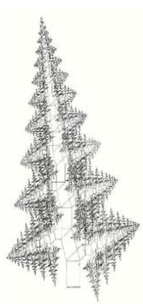


Figura 2.
Árbol pitagórico escaleno rectángulo. Tipo II

CONSTRUCCIÓN DE UN ÁRBOL PITAGÓRICO DEL TIPO III

ENUNCIADO DE LA SITUACIÓN

Reproducir virtualmente el árbol pitagórico de la figura 3, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de la figura, cuando sea modificada por arrastre y determine la expresión algebraica para la hipotenusa de uno cualquiera de los triángulos isósceles rectángulo.

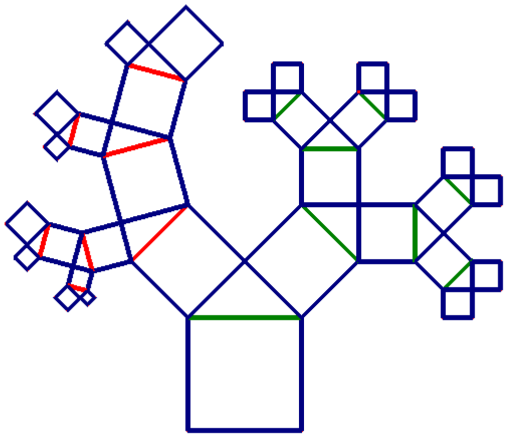


Figura 3.
Árbol pitagórico del Tipo III

Previsión de posibles resultados, comportamientos u obstáculos.

RECOMENDACIONES PARA LA CONSTRUCCIÓN

- Identifique los objetos geométricos que componen el árbol pitagórico TIPO I.
- Construya un cuadrado mayor de lado 5 *cms* que sirva de base para el árbol.
- Construya un triángulo isósceles rectángulo con hipotenusa a uno de los lados del cuadrado.
- Automatice la macro CUADRADO sobre cada cateto del triángulo isósceles rectángulo.
- Automatice la macro isósceles sobre el cuadrado resultante.
- Automatice la macro escaleno sobre el cuadrado resultante.
- Repita el procedimiento, aplicando las macro CUADRADO, isósceles y escaleno hasta completar la construcción.
- Mida las hipotenusas resultantes de los triángulos isósceles rectángulo y escaleno rectángulo..
- Registre en una matriz, el número de la hipotenusa y su medida correspondiente.

PREGUNTAS ORIENTADORAS

- ¿Qué relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3? ¿Y entre la longitud hipotenusa 2 y la hipotenusa 4?
- ¿Cómo calcula la longitud de la primera hipotenusa? ¿y, el cálculo de la tercera hipotenusa?
- ¿Puede predecir sin hacer cálculos, la longitud de la hipotenusa del séptimo triángulo isósceles rectángulo?
- ¿Cuál es la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los catetos y la hipotenusa de cada triángulo isósceles rectángulo?
- Explore otras expresiones algebraicas y trigonométricas que le permitan calcular las longitudes de las hipotenusas?

Árbol pitagórico del Tipo II "LA SILLA DE LA NOVIA"

Euclides de Alejandría (Siglo III a. c), autor del libro los Elementos, tratado de geometría y de teoría de números, que durante muchos años sirvieron de modelo para el razonamiento lógico.

Los Elementos divididos en trece libros o capítulos, seis de ellos dedicados a la Geometría plana, tres sobre Teoría de Números, tres a la geometría de los sólidos y un libro sobre los números inconmensurables. El libro I, concluye en las proposiciones 47 y 48 con las demostraciones del Teorema de Pitágoras y su recíproco, Euclides utilizó una bella demostración que se ha descrito a veces como un "Molino de viento", o una "Cola de pavo real" o bien como "La Silla de la novia".

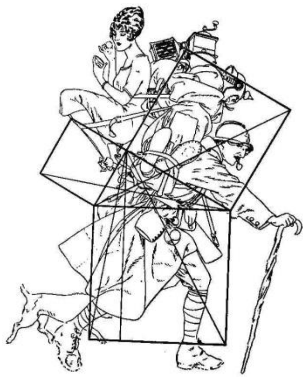


Figura 4 ilustra "La Silla de la Novia" en el contexto de la primera guerra mundial.

Si el área del cuadrado que soporta “La Silla de la Novia” es la mitad del área del cuadrado donde el soldado lleva su equipo de campaña, entonces el área del cuadrado que debe soportar el sistema “Novia _ Equipo” es:

A. La mitad del área del cuadrado que ocupa el equipo de campaña.
B. El doble del área del cuadrado que ocupa el equipo de campaña.
C. El triple del área del cuadrado que soporta la “Silla de la novia”.
D. La tercera parte del área del cuadrado que soporta la “Silla de la novia”.

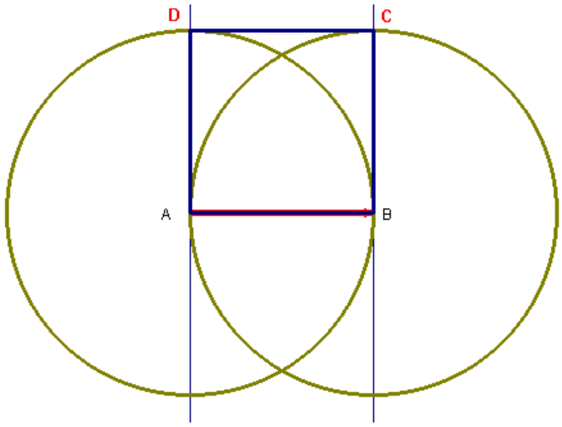
CONSTRUCCION DE MACROS

Una macro es una secuencia de construcciones interdependientes, que permite automatizar construcciones, de manera que no es necesario repetir todos los pasos. Resultan útiles para crear nuevas herramientas que construyen objetos determinados o realizan tareas repetitivas. Una macro construye objetos geométricos finales (el resultado final de la construcción) basándose en objetos geométricos iniciales. Esta función permite construir figuras geométricas, y es el método principal para construir fractales.

MACRO CUADRADO

Utilice un vector para crear una macro que construya un cuadrado de acuerdo con un cierto orden: seleccione primero el punto A y después el punto B como objetos iniciales.

Después seleccione el cuadrado $ABCD$ como objeto final.
Esta macro construirá un cuadrado de acuerdo con el orden con el que se creen los puntos.



Dibuje dos puntos A y B en la pantalla, construya el segmento $\overline{AB}$, desde el punto A trace un vector hasta el punto B. Trace una línea recta perpendicular al vector y que pase por el punto A y trace una línea recta perpendicular al vector y que pase por el punto B, construya circunferencias de radio $\overline{AB}$ y el punto A como centro, y de radio $\overline{AB}$ y el punto B como centro.

Llame C y D a los puntos de corte con las circunferencias y finalmente defina el polígono $ABCD$

Oculte las construcciones auxiliares, rectas perpendiculares, circunferencias, arrastre la cabeza del vector rotando el punto A.

¿Qué magnitudes se mantienen invariantes en el polígono $ABCD$?

MACRO ISÓSCELES

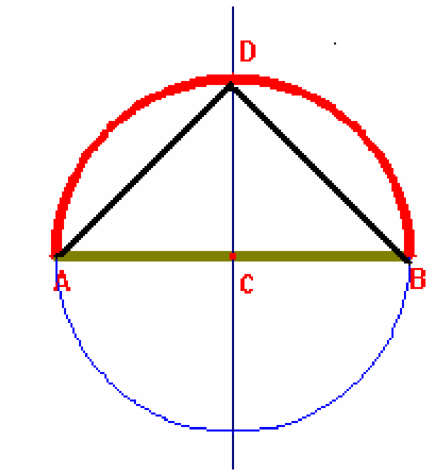
Esta macro construye un triángulo isósceles de un segmento.

Objetos geométricos Iniciales:

- segmento $\overline{AB}$

Objetos geométricos intermedios:

- Mediatriz del segmento $\overline{AB}$
- Circunferencia con centro en C y radio $\overline{AC}$
- Trace el arco BDA.
- Trace el polígono BDA



Verifique que se cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos.
- ✓ Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.
- ✓ Un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Objetos geométricos finales:

Para construir la macro

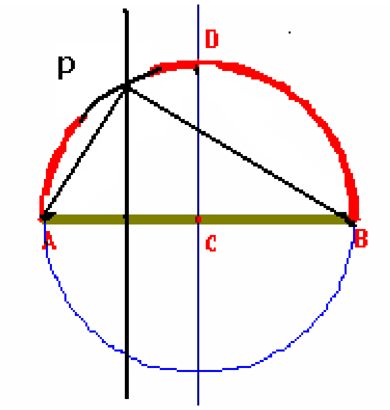
Objetos iniciales: El punto A y el punto B.

Objetos finales: el polígono BDA

Definir macro: Isósceles

MACRO ESCALENO

Construya un triángulo escaleno rectángulo a partir de la siguiente figura y escriba los pasos necesarios.



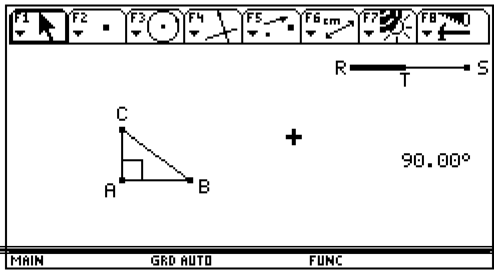
SEGUNDA SESIÓN

RELACIONES ENTRE LAS FIGURAS PLANAS SEMEJANTES Y EL TEOREMA DE PITÁGORAS

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

La actividad se inicia Abriendo un archivo donde se encuentra construido un triangulo rectángulo donde posteriormente se mostrará la aplicación del teorema de Pitágoras con distintos polígonos regulares.

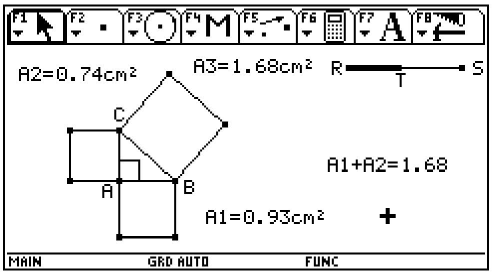
Abra el archivo **trirec2**[1] y responda las siguientes preguntas:



¿Qué sucede si movemos el punto T sobre el segmento $\overline{RS}$?

¿Qué magnitudes se mantienen invariantes en el triangulo rectángulo ABC al mover el punto T y cuáles no?

Sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo ABC, construye un cuadrado.

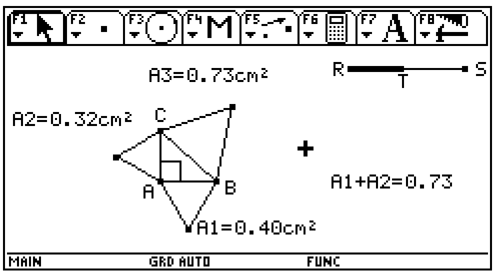


¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado mayor y la suma de las áreas de los cuadrados menores al mover el punto T?

Anime el punto T, y observe lo que sucede

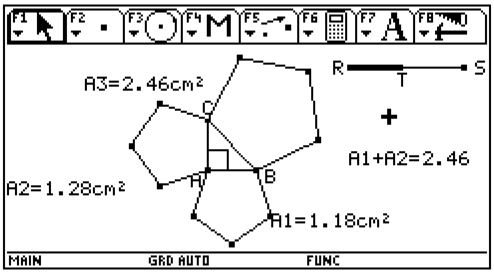
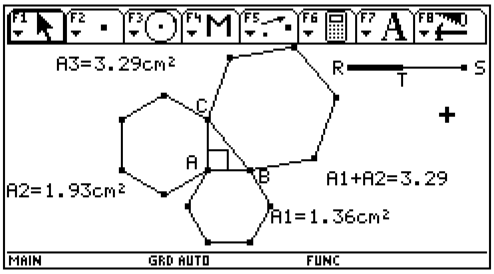
Borre los cuadrados de la figura anterior y sobre el triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en A, (catetos e hipotenusa) construye triángulos equiláteros y establece la relación entre las áreas de los triángulos.

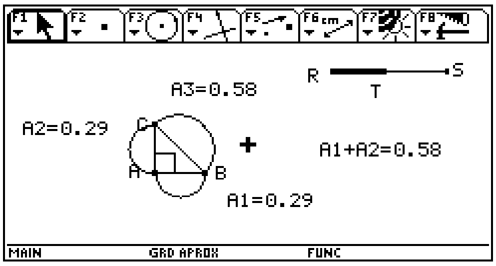
¿Qué relación se puede establecer entre las áreas de los triángulos equiláteros?



[1] En el archivo trirec2 se encuentra la construcción de un triangulo rectángulo ABC.

<table>
<tr>
<td>¿Qué sucede con el área del triángulo mayor y la suma de las áreas de los triángulos menores al mover el punto T sobre el segmento $\overline{RS}$?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Borre los triángulos equiláteros de la figura anterior y sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, rectángulo en A, construye pentágonos y establece la relación entre las áreas de los pentágonos.

¿Qué relación se puede establecer entre las áreas de los pentágonos?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Borre los pentágonos de la figura anterior y partir del triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en A y sobre cada uno de sus lados (catetos e hipotenusa) construye hexágonos. ¿Encuentra la relación entre estos hexágonos?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Borre los hexágonos de la figura anterior y construye sobre cada uno de los lados del triángulo ABC, con ángulo recto en A, semicírculos y encuentra la relación que existe entre el área del semicírculo mayor y la suma de las áreas de los semicírculos menores.

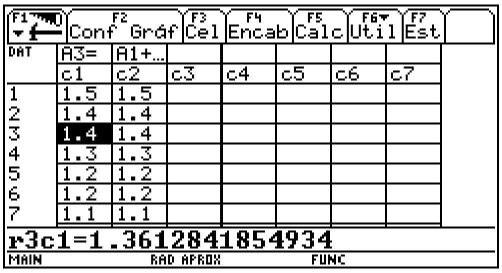
Mueve el punto T sobre el segmento $\overline{RS}$ y escribe tus conclusiones.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Construye una tabla a partir del área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños en un triángulo ABC, rectángulo en A.

Borre los semicírculos de la figura anterior y sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo ABC, construye cuadrados.

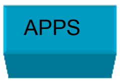
1. Seleccione F6+7, agrupar datos, definir entrada

2. Seleccione los datos que se van a relacionar. Inicialmente el área del cuadrado mayor y después la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños.



3 seleccione F6+7 agrupar datos, almacenar datos

4. Seleccione F7+3 Animación.



5.Anime el punto T sobre $\overline{RS}$

6. Abrir la tabla arrojada por estos valores

Utilizando la tabla estudie que sucede con el área del cuadrado mayor y la suma de las áreas de los cuadrados menores a medida que los valores varían en las dos columnas,

<table>
<tr>
<td>

⊙ Construye la grafica que representa el área del cuadrado mayor y la suma de las áreas de los cuadrados menores cuando un cateto varía su longitud.

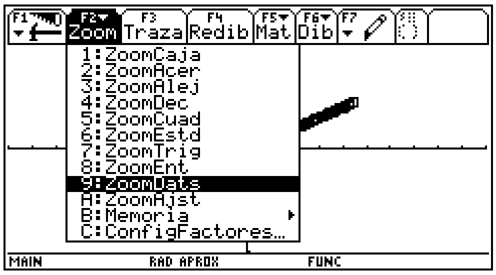
1. Ubicados en el editor de datos, selecciona F2 configurar gráficos.
2. Seleccione F1 para definir las características de la grafica
3. Seleccionar el tipo de grafico (líneas xy) y el tipo de marca para los puntos (cajas)
4. Asignar a la variable X los valores correspondientes a la columna 1 (c1)
5. Asignar a la variable Y los valores correspondientes a la columna 2 (c2)
6. Oprimir ENTER dos veces
7. Graficar los puntos (◇ GRAPH).

</td>
<td>

</td>
</tr>
<tr>
<td>

8. Para visualizar mejor la grafica seleccionar ZOOM DATS en F2+9:

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

De acuerdo con la grafica, ¿como están relacionadas las variables?

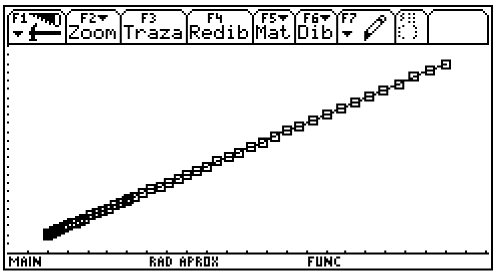
</td>
<td>

Justificaciones

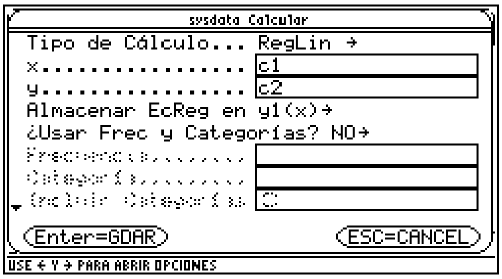
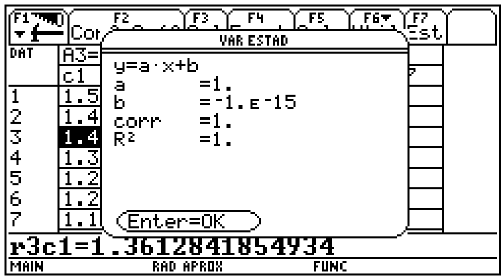
</td>
</tr>
<tr>
<td>

¿Podrías establecer algebraicamente esta relación?, ¿Cómo lo harías?

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Para encontrar la ecuación que liga las dos variables estudiadas realiza el siguiente procedimiento: Ubicados en el editor de datos, seleccionar F5 CALC y escoger el tipo de regresión que mejor se ajuste a los datos. Guardar esta función en y1(x).	
¿Cuál es la ecuación que relaciona las variables área del cuadrado mayor y suma de las áreas de los dos cuadrados menores?	
¿A partir de esta ecuación que puedes concluir?	
¿Cuál es el valor de la pendiente?	
¿Cuál es el valor del intercepto con el eje y?	
¿Cómo se interpretan estos valores?	

PREGUNTAS PARA LA EXPLORACIÓN

- ¿Cómo estarán relacionadas las longitudes de la hipotenusa y la longitud del cateto variable?

- ¿Cómo estarán relacionadas la longitud del cateto variable y el área del cuadrado mayor?
- ¿Cómo están relacionadas la longitud del cateto variable y la suma de las áreas e los cuadrados pequeños?
- ¿Es posible que el teorema de Pitágoras se cumpla construyendo polígonos semejantes sobre cada uno de sus lados?

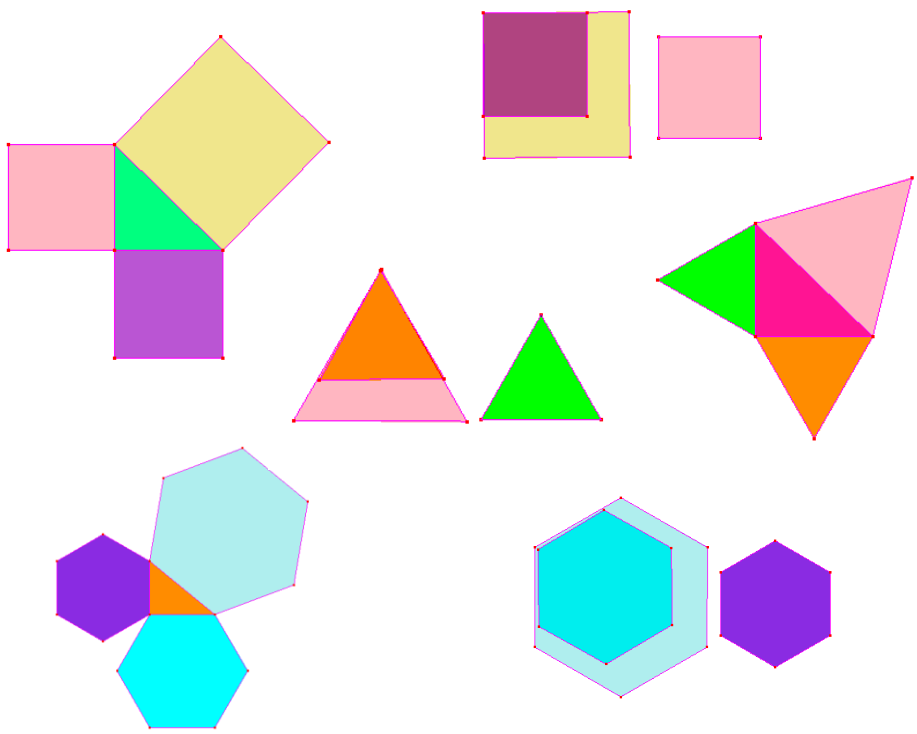
TERCERA SESIÓN

EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y LOS POLÍGONOS IRREGULARES

FORMAS DE INTERVENCIÓN EN EL AULA

¿Es posible la generalización del teorema de Pitágoras, a partir de la construcción de polígonos regulares construidos sobre los lados del triángulo rectángulo? ¿Cómo?

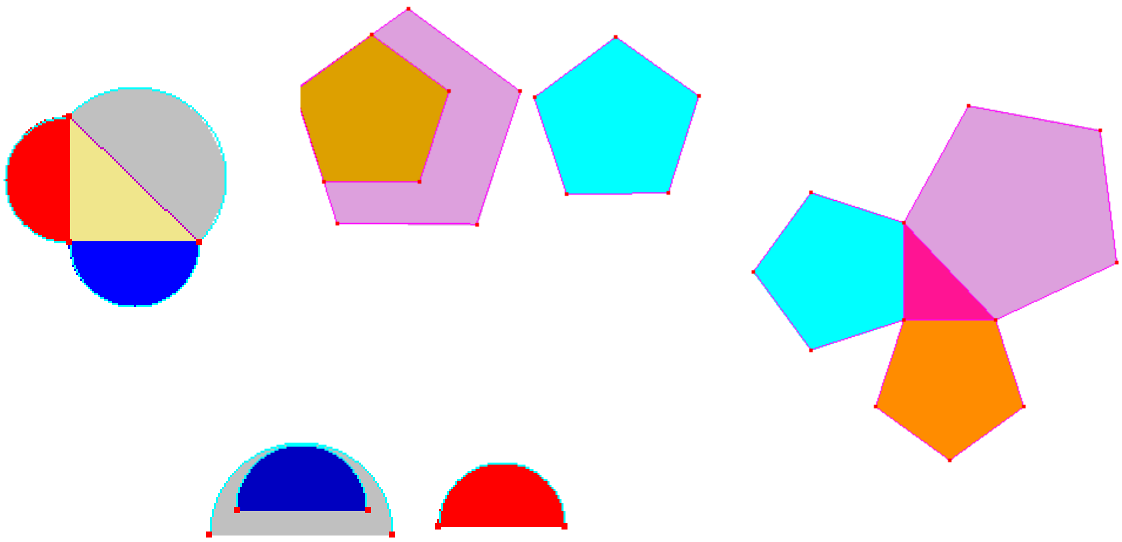
A través de demostrar, que el cuadrado construido sobre la hipotenusa se puede cubrir totalmente y no sobra nada con los cuadrados construidos sobre lo catetos, haciendo uso del recortado.



Al igual que lo desarrollado con los cuadrados se podría hacer con los triángulos equiláteros.

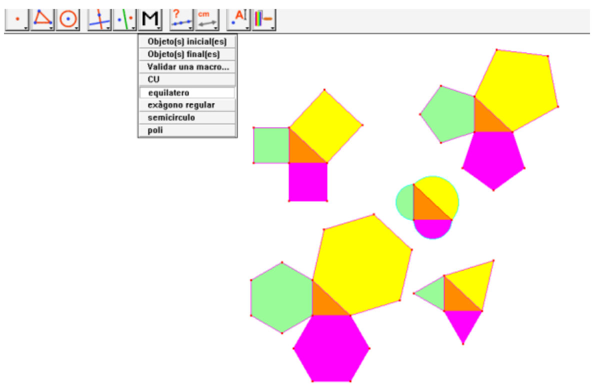
En esta situación para demostrar el teorema recortando se dificulta por la cantidad de recortes que habría que hacer, ¿se cumplirá el teorema? ¿Por qué? Surgen grandes dudas al respecto, se generan muchas conjeturas; aquí es donde la tecnología cumple un papel primordial, pues no permitirá verificar estas conjeturas.

Al igual que la situación anterior, planteemos las dos siguientes situaciones.

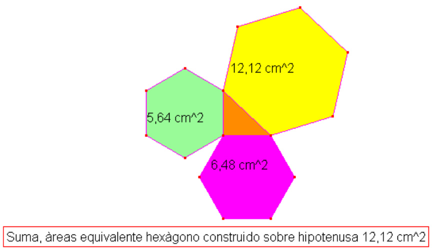


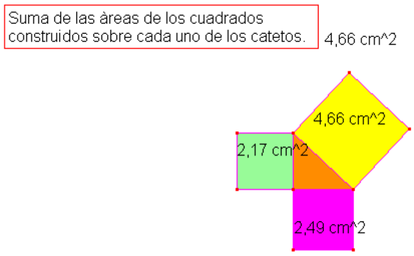
Se podría generar una nueva estrategia a partir de la construcción de Macros y hacer uso de la matemática, que nos permitiría comparar áreas y así podríamos verificar el Teorema.

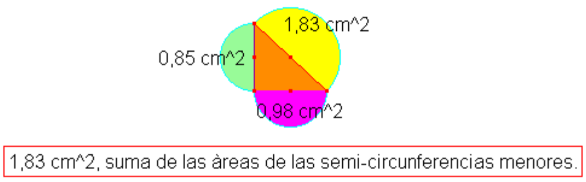
Veamos.

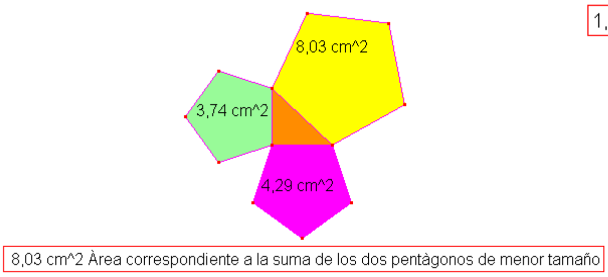


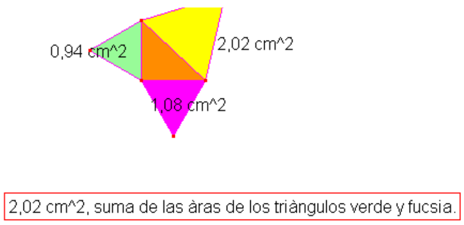
Veamos los resultados, aplicando lo numérico.





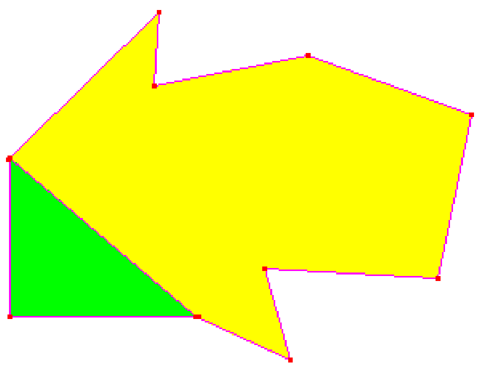






¿Será posible la demostración del teorema de Pitágoras a partir de la construcción de polígonos irregulares sobre la hipotenusa, y los catetos de un triangulo rectángulo?

¿Cómo lo podríamos demostrar?, ¿Cómo generamos polígonos semejantes a partir de uno dado o construido? , ¿Se podrá a través de la herramienta macro-constricción? ¿Cómo hacerlo?, ¿qué otro concepto geométrico podríamos utilizar?

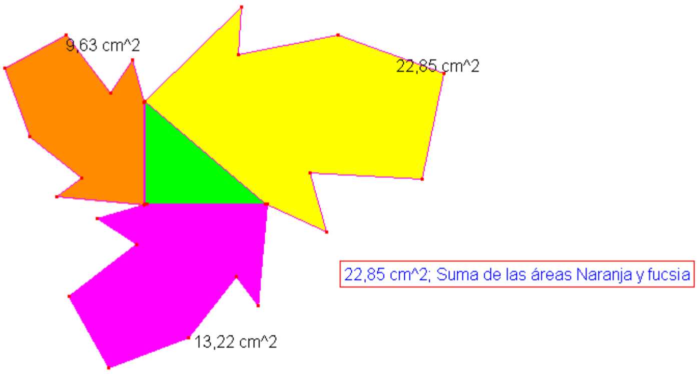


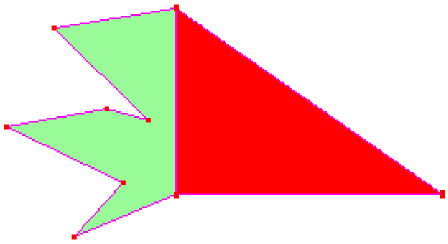
Triángulo Rectángulo y polígono dado

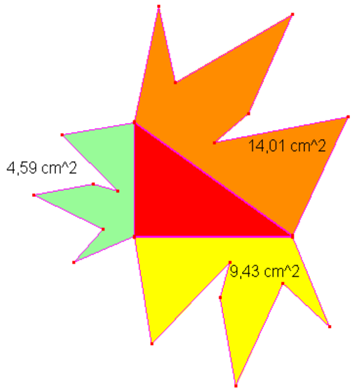
Figura obtenida a partir de la que

nos han dado. ¿Los polígonos serán semejantes?, ¿por qué? ¿Estarán correctamente ubicados en el triángulo rectángulo? ¿Se demuestra el Teorema de Pitágoras?, ¿se podrá con cualquier tipo de polígono dado en cualquiera de los tres lados?

Situación dada inicialmente.







Resultados obtenidos a partir del uso de la homotecia, como concepto potenciador de la situación planteada.

PROFUNDIZANDO EN EL ESTUDIO DE CADA UNA DE LAS CONSTRUCCIONES OBTENIDAS.

Se les propone examinar las relaciones entre las áreas de cada una de las construcciones, teniendo en cuenta la relación entre el polígono construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y la relación con las otras dos áreas construidas sobre cada uno de los catetos.

VALOREMOS LO ENCONTRADO

¿Es posible generar una estrategia que me permita demostrar el Teorema de Pitágoras a partir de la construcción de polígonos irregulares sobre los lados del triángulo rectángulo?, ¿se cumplirá siempre el Teorema?, ¿deberán ser polígonos con algunas características en particular?

¿Será posible llevar el Teorema de Pitágoras a otros campos de la Geometría, de la Matemática?, ¿cómo cuales?

Un tema muy interesante y llamativo para los estudiantes, y además con un gran valor pedagógico, pero difícil de trabajar con regla y compás. La geometría dinámica abre nuevas posibilidades de exploración en este campo. Los invitamos a sacar sus propias conclusiones.

Muchas Gracias