EXPLICACIÓN Y ARGUMENTACIÓN A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA DE TRILADOS

(1) Isaac Lima Díaz – (2) María Fernanda Dueñas

(1) isaacsito@gmail.com – (2) duenas.fernanda@gmail.com

Colegio Esclavas del Sagrado Corazón de Jesús. COLOMBIA

RESUMEN

Propuesta didáctica para la enseñanza de un modelo de geometría plana implementando Cabri Geometre II Plus, en el que se analizan los procesos de argumentación y explicación a partir de las propuestas planteadas por los estudiantes, quienes a partir del uso de las herramientas del Software mencionado axiomatizan y definen los elementos que son parte de una geometría denominada Geometría Dinámica del Trilado GDT.

INTRODUCCIÓN

En el primer semestre de 2007, en el marco del Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se genera una propuesta para el aprendizaje de un modelo de geometría semejante a la plana con ayuda de Cabri Geometre, instituyéndose un grupo de estudio denominado Estudio Dinámico del Trilado, el cual presenta, entre otros, los siguientes objetivos: "Realizar una propuesta de actividades que fortalezcan, fomenten e incentiven el interés por el estudio de las matemáticas; promoviendo alternativas de estudio respecto de teorías de geometría que estén relacionadas con el trabajo que se hace en las escuelas y colegios a nivel nacional", "Abordar algunas situaciones teóricas de geometría plana con la ayuda del programa Cabri Geometre, explorando las características del software y la potencialidad en el uso de sus herramientas" y "Generar propuestas para la exploración de objetos en geometría dinámica y así consolidar una propuesta para geometría no euclidiana con ayuda de herramientas tecnológicas".

El resultado del curso Estudio Dinámico del Trilado trajo como resultado la definición de objetos establecidos mediante la contextualización del modelo geométrico Geometría Dinámica del Trilado GDT. Aunque se dice que el trilado es el análogo del triángulo de la geometría plana, el trilado no es el único objeto de estudio. Se definieron relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre objetos, además de la caracterización de los propios en GDT.

En el primer semestre de 2008, la idea es retomada y aplicada en el marco de los talleres de competencias del Colegio Esclavas del Sagrado Corazón de Jesús, analizando los procesos de argumentación y explicación expuestos por Duval (2000) y teniendo en cuenta los aportes de los niños y niñas que participaron en el grupo Estudio Dinámico del Trilado tanto en el Club de Matemáticas como en el Colegio de las Esclavas, en particular la de Juanita Briceño, Luís Ortiz, Juliana Palacino y Ana María Montero; como consecuencia de este proceder se decide conformar este taller así:

Primera Sesión: Axiomatización de la Geometría Dinámica del Trilado GDT. Primeras Nociones y Construcciones.

Segunda Sesión: Paralelismo y perpendicularidad entre objetos de GDT. Polilados.

Tercera Sesión: Trilados. Teoremas y construcciones con trilados. Análisis de procesos de Explicación y Argumentación vivenciados en la propuesta.

OBJETIVOS

Esta propuesta tiene como propósito motivar la utilización de diversas estrategias metodológicas como herramientas de exploración en el estudio de las propiedades de algunos elementos de geometría plana. Para que un estudiante desarrolle verdaderas habilidades geométricas (Laborde, 1998) es necesario un acercamiento inicial, de carácter informal, que le de la oportunidad de: explorar, comparar y establecer relaciones, descubrir propiedades, construir modelos, elaborar conclusiones y llegar a algunas generalizaciones expresando verbalmente las acciones realizadas y las propiedades observadas en diversas actividades. Por tanto, se propone:

- Socializar una propuesta de actividades implementadas en el contexto Colombiano que fortalecen, fomentan e incentivan el interés por el estudio de las matemáticas; promoviendo alternativas de estudio respecto de teorías de geometría que estén relacionadas con el trabajo que se hace en las escuelas y colegios a nivel nacional.

- Abordar algunas situaciones teóricas de geometría plana con la ayuda del programa Cabri Geometre, explorando las características del software y la potencialidad en el uso de sus herramientas.
- Generar propuestas para la exploración de objetos en geometría dinámica y así consolidar una propuesta para geometría no euclidiana con ayuda de herramientas tecnológicas.
- Involucrar herramientas tecnológicas como el software educativo Cabri Geometre, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en espacios que complementen el trabajo en el aula de clase, y así analizar los procesos de explicación y argumentación cuando se implementan las nuevas tecnologías.

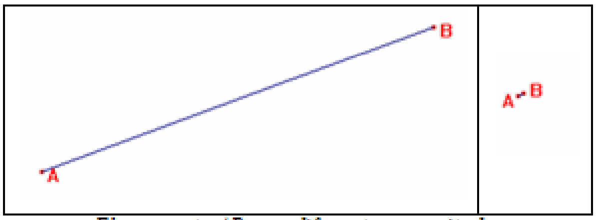
GEOMETRÍA DINÁMICA DEL TRILADO

Se construye la Geometría Dinámica del Trilado GDT a partir de algunas características que la hacen una geometría en el plano con carácter dinámico; es decir, los elementos de la geometría en construcción tienen movimiento. Tanto los elementos como los movimientos de los elementos pueden ser independientes o dependientes. Un elemento A de GDT es dependiente de otro B si la existencia de A está ligada a la existencia de B; en otras palabras si B existe es porque A existe. Un movimiento de un elemento X de GDT es dependiente, si X depende de otro elemento.

Para trabajar en GDT es necesario tener acceso al programa de geometría Cabri Geometre II Plus y tener un conocimiento básico en la utilización de algunas de las herramientas del programa. Cabri, al igual que los programas para Windows tiene un entorno visual en el que es fácil identificar y usar las herramientas, este software maneja dos barras de herramientas: las usuales de Windows y las propias de Cabri. Las herramientas usuales de Windows permiten grabar los archivos, preparar las zonas de impresión, imprimir, editar y copiar figuras, revisar construcciones, configurar la zona de trabajo y configurar el funcionamiento de algunas herramientas de Cabri. También es posible obtener ayuda y desplazarse entre ventanas.

Con las herramientas propias de Cabri se trabaja todo lo relacionado con las construcciones de la geometría dinámica; para el caso de GDT, la estructura de la geometría estará basada en el manejo de algunas herramientas que poco a poco se irán introduciendo, a medida que se necesitan; otras, se utilizarán parcialmente y luego se evitará su uso.

GDT es una geometría plana que por su carácter dinámico permite solapar – sobre poner – elementos manteniéndose en el plano. Además, teniendo como referencia las primeras construcciones de una geometría plana, como la geometría Euclidiana, la geometría de Hilbert, entre otras, y la característica de movimiento que ofrece Cabri, GDT no posee un sistema métrico, es decir, **no existen medidas**. Esto, porque al existir movimiento, un elemento se puede agrandar o encoger sin dejar de ser "el mismo elemento"; ejemplo de ello es el segmento, que inicialmente puede ser muy grande, pero en algún momento se puede reducir tanto que tiende a ser un punto. No obstante, se trabaja con la noción de longitud y de mitad de algo como aquello que divide en dos partes iguales un "todo" limitado.



El segmento AB con diferentes magnitudes

El lugar de trabajo en GDT será **HK**, término derivado de la palabra Hoja de Cabri y su representación está dada por el lugar de trabajo que presenta el programa de geometría dinámica. HK no tiene principio ni fin, pero su representación visual sí, debido a las características de diseño del programa para computador.

En este sentido, la noción de HK en GDT es semejante a la noción intuitiva del plano en la geometría plana en el que todas las construcciones se hacen en ese lugar, aunque se represente en hojas o lugares que sean similares a estructuras llanas. De esa manera, HK cuenta con las siguientes características:

- Es el lugar en el que se realizan todas las construcciones de GDT
- En HK es posible que un elemento se pueda solapar sobre otro sin convertirse en el mismo.
- En HK no existen medidas
- No tiene principio ni fin, aunque su representación visual si.
- Los elementos que estén en HK se pueden mover: rotar o trasladar.

Hasta el momento se ha dicho que los elementos en GDT pueden moverse, y se han mencionado dos de estos movimientos; no obstante, existen otros que se generan por la “composición” de los anteriores dando pie a ideas como el cambio de medidas de los objetos (cuando se construye un segmento y se traslada uno de los puntos extremos), claro está debido a la idea de dependencia, como la deformación de un polígono cuando se construye a partir de puntos definidos con la herramienta punto.

Tanto el movimiento como la no existencia de la medida serán las primeras nociones comunes que sustentarán el cuerpo axiomático de la Geometría GDT. No se entrará en profundizar en qué consiste cada una de ellas, simplemente se dará como verdad universal.

NOCIONES COMUNES, AXIOMAS Y PRIMERAS DEFINICIONES

En GDT y trabajando en Cabri es posible identificar los elementos que se definen y construyen en HK. En los Elementos, Euclides parte de un conjunto de nociones comunes, axiomas y definiciones para construir la geometría; de igual forma procede Hilbert en los “Fundamentos de geometría” y de manera similar se construye en esta propuesta.

Para Euclides, los postulados y los axiomas o nociones comunes son dos clases de propiedades de los objetos matemáticos que se aceptan sin discusión. No se diferencian mucho entre si, el geómetra no explica cuando una afirmación se considera axioma y cuando postulado.

Al comienzo del libro I de los Elementos se encuentran las definiciones de los conceptos básicos de la geometría euclidiana y, a continuación, se enumeran todos los postulados y axiomas. Por eso en este principio se exponen los fundamentos de la geometría, según Euclides las definiciones son en total 23. Las nueve primeras dicen: Un punto es lo que no tiene partes. Una línea es una longitud sin anchura. Las extremidades de una línea son puntos. Una recta es una línea que yace por igual respecto de todos sus puntos. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura. Las extremidades de una superficie son líneas. Una superficie plana es una superficie que yace por igual sobre todas las líneas que contiene. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran en un plano y no forma línea recta. Y cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo es rectilíneo"

En las siguientes definiciones se introduce el concepto de perpendicularidad, y se explica lo que son los ángulos obtusos y agudos. Se prosigue con el círculo y el diámetro para continuar con los polígonos. Se definen los triángulos equiláteros, isósceles y escalenos y también los triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos. Se dice lo que es un cuadrilátero y se explica en qué se diferencian los cuadrados, rectángulos, rombos, y romboides. La última definición es la de rectas paralelas: *Rectas paralelas* son aquellas que, estando en un mismo plano, por más que se las prolongue en ambos sentidos nunca se encuentran.

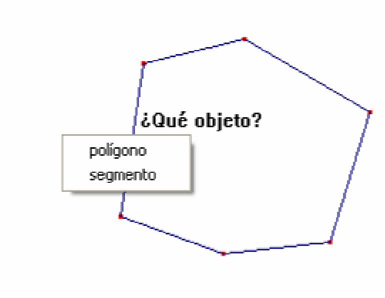
De forma análoga a la teoría de geometría plana presentada anteriormente, en GDT es necesario establecer una colección de supuestos que admitiremos sin demostración y que permitirán construir la teoría a partir de ellos. Para esta geometría, las primeras nociones comunes serán punto y recta. Para identificar la noción de punto, se trabaja con la herramienta punto – no punto sobre objeto o no punto de intersección – para observar las características, los invariantes y las formas de definir un punto:

Noción Común 1. Movimiento: Es la característica que tiene un elemento de GDT para ubicarse en cualquier lugar de HK sin modificar sus invariantes; es un estado de los elementos mientras cambian de lugar o de posición como decía Aristóteles.

Noción Común 2. Medida: Todos los elementos de HK carecen de medida. Algunos elementos de HK poseen longitud. Esto se debe principalmente al movimiento y a la definición de medida que asigna un número real a una longitud bajo un patrón, que en Cabri puede ser modificado de acuerdo a las características de la geometría que trabaje el usuario.

Noción Común 3. Dependencia: Un elemento A de HK es dependiente de otro elemento B si la existencia de A está ligada con la existencia de B. Para identificar si un elemento A es dependiente de otro B se puede borrar el B y verificar la existencia de A. Si un elemento C no depende de algún elemento D se dice que C es independiente de D.

Noción Común 4. HK: El lugar en el que se realizan todas las tareas propuestas para la Geometría GDT.



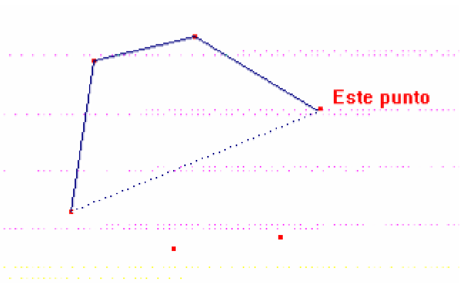
A partir de estas nociones comunes se axiomatiza el punto y la recta y se estudia la construcción de las rectas desde la definición de uno o varios puntos. Luego se procede de manera similar que Euclides procede con la geometría plana. Un ejercicio interesante consiste en tratar de identificar las variaciones que pueden surgir cuando se piensa en otras variables. Algunas preguntas que pueden ser consideradas son: ¿Existen objetos paralelos y perpendiculares entre sí? ¿Qué características tienen estos objetos?, por ejemplo

Recta perpendicular a una circunferencia: dada una circunferencia en HK con centro en O y un punto cualquiera P sobre dicha circunferencia, construir el segmento determinado por O y el punto P; se llamará recta perpendicular a la circunferencia, a la recta que pasa por el punto P y que es perpendicular al segmento OP. Nótese que esta definición concuerda con la definición usual de recta tangente a una circunferencia.

Circunferencias perpendiculares. Si dos circunferencias se cortan (intersecan), diremos que éstas son perpendiculares si las rectas perpendiculares a las circunferencias en los puntos de intersección, son rectas perpendiculares entre si.

De manera análoga se trata el paralelismo y la perpendicularidad entre objetos.

POLILADOS



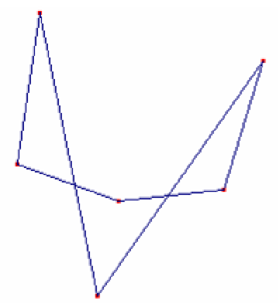
Se asume un polilado como un objeto geométrico definido por al menos tres puntos con las siguientes características:

No se constituye de segmentos, el polilado es similar a una banda de caucho que se acomoda en la totalidad de puntos por los que se va a determinar.

Entre dos puntos por los que pase el polilado se puede solapar un segmento, a esa sección del polilado se le llama lado.

De manera visual, dos lados de un polílado se pueden intersecar o solapar, no obstante, por su condición de objeto geométrico nunca existirá un punto de intersección entre un mismo polilado.

El orden y el sentido en el que construye el polilado pueden determinar la existencia de un polilado solapado sobre otro. Si el polilado está determinado por los puntos $p_0, p_1, p_2, ..., p_n$ con n un número natural mayor que 2, el polilado determinado por los puntos $p_k, p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_{k+(n-k)}, p_0, p_1, ...p_{k-1}$ con k un número natural menor o igual que n será el mismo que el primero. Así, el polilado ABCD es el mismo polilado CDAB, igual que el polilado BCDA y que el polilado DABC.



En cambio, el polilado determinado por los puntos $p_n, p_{n-1}, ..., p_2, p_1, p_0$ solapará al polilado determinado por los puntos $p_0, p_1, p_2, ..., p_n$. De esta manera, el polilado ABCD solapa al polilado DCBA.

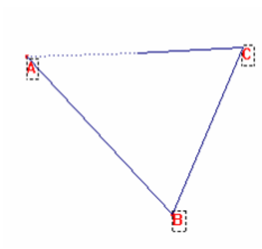
Un polilado se construye en HK con la herramienta polígono del programa Cabri.

Igual que con otros objetos geométricos es importante reconocer los movimientos que se pueden determinar con el polilado, identificando las dependencias entre elementos de GDT. Si los puntos que determinan el polilado son independientes, *¿Qué ocurre si se mueve el polilado? ¿Qué ocurre si se mueve un punto del polilado? ¿Se puede rotar un polilado? ¿Cómo? ¿Se puede hablar del interior de un polilado?*

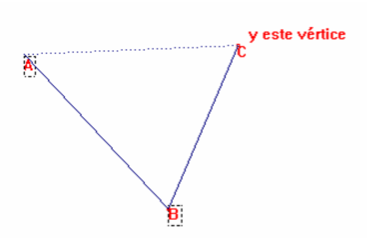
Trilado: Polilado de tres lados.

En la geometría GDT y aprovechando la gama de opciones que ofrece el programa Cabri es posible construir trilados de distintas maneras, algunas de ellas son:

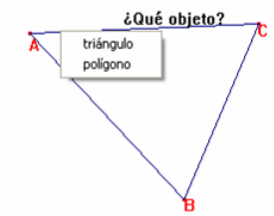
Trilado con la herramienta polígono: Un trilado se puede construir con la herramienta "polígono" de la misma manera como se construye un polilado, teniendo en cuenta que para garantizar que sea trilado únicamente estén definidos tres puntos. Dados los puntos A, B y C, se elige la herramienta "polígono" y se hace clic en A, luego clic en B y C, y finalmente clic en A. Es de notar que Cabri identificará el objeto como un polígono y no como un triángulo y este se notará como el trilado ABC.



Trilado con la herramienta triángulo: El lector puede comprobar que en el mismo menú de herramientas en el que está polígono se encuentra la herramienta triángulo. El algoritmo con el que se construye un trilado en GDT con la herramienta en mención es similar a la herramienta polígono aunque no es el mismo porque Cabri identifica al polígono y al trilado como dos objetos distintos: Dados los puntos A, B y C, se elige la herramienta triángulo y se hace clic en A, luego clic en B y finalmente clic en C; en este momento el trilado ABC queda construido, no es necesario dar clic nuevamente en el punto A, dando por finalizada la construcción del trilado ABC. Cabri identificará el objeto como un triángulo y no como un polígono.



Aunque para el programa Cabri un triángulo y un polígono de tres lados son dos objetos distintos, las características de los dos objetos son las mismas y por ello, dicha información no es relevante en el desarrollo de la geometría GDT, en particular con el estudio dinámico del trilado.



Vértices: Los puntos que determinan los lados del trilado se denominan vértices.

En este momento el estudio de los movimientos de los trilados no son tan relevantes por la definición de ese objeto geométrico en GDT; no obstante, el lector se preguntará cómo va a ser el estudio del trilado, en particular si en la construcción de GDT se ha llevado a cabo un paralelo con las geometrías de Edwin Moise y de Euclides y no se trabaja con medidas.

A partir de los momentos de la Geometría Dinámica del Trilado se pueden vivenciar dos etapas que Duval enmarca dentro de la teoría de los Sistemas Semióticos: explicación y argumentación. Quizás no se encuentren grandes diferencias entre estos términos, por lo que es menester una revisión epistemológica que permita obtener ciertas claridades respecto a estos y sus diferencias para llevarlos al contenido matemático en discusión. Para ello se han abordado, algunos trabajos realizados por Duval alrededor de los años noventa, los cuales involucran y esquematizan estos conceptos.

Para comenzar se hará claridad sobre las interpretaciones y formas en que deben ser entendidos estos términos, desde una perspectiva cognitiva y desde una perspectiva matemática; puesto que se tiende a pensar que una perspectiva conlleva a la otra, y que a su vez existe en cada una de ellas una jerarquizacion establecida, que hace las veces de esqueleto teórico. (Duval, 2000). La explicación es entendida como una descripción del objeto de conocimiento, en la que se dan uno o más valores para comprender un dato; respondiendo a cuestionamientos del estilo: ¿Por qué se produce este fenómeno? O ¿Por qué se obtiene este resultado? Por su parte la argumentación requiere no solo una producción de razonamientos tal y como sucede en la explicación, sino que se habla de la aceptabilidad del argumento; referidos específicamente a la pertinencia de éste, en tanto esta se relaciona con los contenidos de la afirmación; y la fuerza de estas en tanto no se concibe ningún otro argumento que se contraponga al mismo.

Según Duval (1999) no es suficiente proponer argumentos, es necesario entender que los mismos al ser propuestos tienen un valor en relación a la afirmación que apoyan, el cual es dado por la persona a la que se dirige y el cual debe tener un valor epistémico positivo, en tanto este sea evidente y posible; y debe tener un valor epistémico si este es absurdo o imposible; asumiendo además una valoración de carácter nula, lo cual nos llevaría a trabajar desde una lógica trivalente. Podemos decir, de la argumentación, que esta descansa sobre un lenguaje natural, por consiguiente de ella se pueden obtener dos modos de expresión, la lengua hablada y la lengua escrita. Las cuales en su orden respectivo, la primera plantea en tiempo real la construcción de la respuesta a cuestionamientos del tipo ¿Por qué afirmas esto? O ¿Por qué respondes esto? Mientras que la segunda se da en un tiempo diferido donde se responde a inquietudes del mismo tipo, nombradas por Duval (1999) como pregunta de dicto.

El estudio de objetos geométricos realizado con lápiz, regla y compás trae consigo algunas limitaciones tales como la imprecisión y la dificultad al explorar los objetos geométricos, factor que con el uso de Cabri Geometre se reduce; la navegación que ofrece el programa hace posible que el estudiante visualice en una misma hoja electrónica una familia de objetos tan solo con mover un punto, de tal manera que discierna sus características geométricas. El profesor Martín Acosta (2005) afirma: "*la figura dinámica, es decir, la que se realiza en Cabri Geometre puede llegar a constituir una demostración en la que no es necesario apagar el computador o la calculadora*", hecho ratificado por Laborde (1996) cuando asevera que las tareas ideales para desarrollar en Cabri Geometre son los problemas de producción de dibujos y los problemas de demostración, los cuales adquieren otra naturaleza, "*en la medida en que permite explicar fenómenos visuales o incluso la imposibilidad de fenómenos visuales*" , acto al que Duval, caracteriza como Argumentación.

El uso de herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ofrece un número amplio de posibilidades para el acercamiento de geometría dinámica (Santos Trigo, 2003; Moreno, 2003). No obstante, la mayoría de veces se enfrenta al estudiante al aprendizaje de programas computacionales, negando algunas de las oportunidades que puede ofrecer el estudio de las matemáticas bajo la orientación tecnológica, para implementar la creatividad en el alumno. Programas de educación matemática como Cabri permiten graficar y manipular funciones que se pueden utilizar en la resolución de problemas como instrumentos que muestren a los jóvenes algunas regularidades o particularidades útiles en el momento de determinar la heurística adecuada para seguir con el desarrollo de una estrategia de solución (Santos Trigo, 2000) , la representación gráfica puede hacerse sin computadoras, pero su empleo facilita enormemente el trabajo en cuanto al gasto en recursos y tiempo (Acosta, 2005), siendo su uso, un elemento con el que los estudiantes pueden explicar fenómenos y argumentar relaciones y situaciones entre ellos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACOSTA, Martín. (2005) *Geometría Dinámica. Exploración y demostración.* En: I Seminario Internacional de Tecnologías en Educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional. 2005

CABRILOG, (2006). Reseña Histórica Cabri.

En: http://www.cabri.com/v2/pages/es/company_history.php

EUCLIDES (1991) *Elementos*. Traducción de María Luisa Puertas. Gredos, Madrid, España.

DUVAL, Raymond. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Traducción de Myriam Vega. Universidad del Valle. Cali – Valle del Cauca.

DUVAL, Raymond. (1999). *Explicar, argumentar o demostrar ¿una ruptura cognitiva?* Editorial Iberoamérica. México D.F.

GASCÓN, J (2003) (1998). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(1): 7-33.

LABORDE Colette. (1998) *Cabri-Geometra o una nueva relación con la geometría.* En Puig, Luis. Investigar y Enseñar. Variedades de la educación matemática. Universidad de los Ándes. Bogotá D.C.

MORENO ARMELLA Luís Enrique (2002) Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Serie Memorias. P. 67,

MOISE, Edwin (1972). *Geometría.* Serie Matemática Moderna. Fondo Educativo Iberoamericano. Editorial Norma. Cali – Valle del Cauca.

SANTOS TRIGO, Luz Manuel. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol X, No2. pp. 195-212.