TRISECCIONES CON CABRI

Yuli Andrea Rodríguez R.

yulyarr@gmail.com

Universidad Pedagógica Nacional

RESUMEN

En este reporte se presentan avances de un trabajo de grado que se viene realizando en la Universidad Pedagógica Nacional sobre mecanismos asociados a problemas geométricos clásicos. Inicialmente se presentará un resumen histórico de los problemas délicos y luego se centrará la exposición en el problema de la trisección del ángulo, en donde se mostrarán cinco mecanismos usados a lo largo de la historia, su construcción y forma de usarlos. Para las construcciones se usará el software de Geometría Dinámica Cabri II Plus.

INTRODUCCIÓN

En la antigua Grecia se plantearon y se resolvieron muchos problemas, pero hay tres que quedaron sin resolver y se convirtieron en unos clásicos durante siglos, constituyendo un auténtico desafío y motor para la ciencia a la que se han unido matemáticos y aficionados; el enigma de estos tres problemas clásicos, no fue resuelto hasta hace relativamente poco tiempo, hasta que no se dispuso de la teoría de Galois no se pudo demostrar la imposibilidad de resolver estos tres problemas tal y como lo plantearon lo griegos, con regla y compás.

Los enunciados de los tres problemas son los siguientes:

Duplicación del cubo: Construir un cubo que tenga el doble volumen que uno dado, o equivalentemente hallar dos medias proporcionales entre dos segmentos dados.

Este fue el problema más popular en la antigua Grecia, quizás por la leyenda que lo rodeaba. Cuenta la leyenda que el problema se originó, en el Oráculo de Delfos. El Oráculo dijo que la epidemia de peste que se extendía por el país acabaría si se duplicaba el tamaño del altar de forma cúbica, dedicado al dios Apolo. Para cumplir los deseos del Oráculo, los arquitectos construyeron un altar cúbico de arista doble que el anterior, pero, de esta forma, se alejaron de los deseos del Oráculo porque el volumen del altar resultó ser ocho veces mayor, y la peste continuó.

Cuadratura del círculo: Hallar un cuadrado con igual área a la de un círculo dado, o equivalentemente, hallar un segmento de recta con la misma longitud que una circunferencia dada.

Surgido en la Antigua Grecia, parece ser que el primero que se ocupó, sin éxito, fue Anaxágoras (s. V a. C.) mientras estaba encarcelado en Atenas acusado de impío por sostener públicamente que el Sol no era ninguna deidad, sino una gran piedra de fuego.

La solución del problema resistió todos los intentos de muchos matemáticos hasta el siglo XIX, cuando el matemático alemán Ferdinand Lindemann (1852-1939) en 1882 demostró que el número □ no es construible al ser un número trascendente (no es solución de ninguna ecuación algebraica). Después de más de 2200 años, el viejo y clásico problema de la cuadratura del círculo quedó resuelto en sentido negativo, es decir quedó demostrada la imposibilidad de resolver el problema. Pese a ello todavía se sigue intentando.

Trisección de un ángulo: Dado un ángulo, hallar un ángulo que es su tercera parte.

La trisección del ángulo fue el menos popular de los tres problemas, quizás por no tener una leyenda que lo realzara, o bien porque tiene una naturaleza distinta de los otros dos, pues no se puede duplicar ningún cubo, no se puede cuadrar ningún círculo, pero si se pueden trisecar con regla y compás algunos ángulos como por ejemplo el de 90º, este puede ser uno de los motivos por lo que aun hoy en día existen trisectores de ángulos.

En este trabajo se va a tratar la trisección del ángulo, se expondrán diferentes curvas (que no se pueden trazar solo con regla y compás) que surgieron estudiando la trisección de un ángulo o que se inventaron para ello, de ninguna manera resolvemos el problema clásico de la trisección de un ángulo, con su planteamiento original, pero se da una visión bastante amplia aprovechando la potencialidad del software de Geometría Dinámica Cabri II Plus.

ALGUNAS CURVAS O MECANISMOS USADOS

CUADRATRIZ DE HIPÍAS

Aparece en el siglo V a.C., es la primera curva, distinta de las rectas y circunferencias, surge incluso antes que las cónicas. Esta curva se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que son intersección de dos rectas que cumplen las siguientes condiciones:

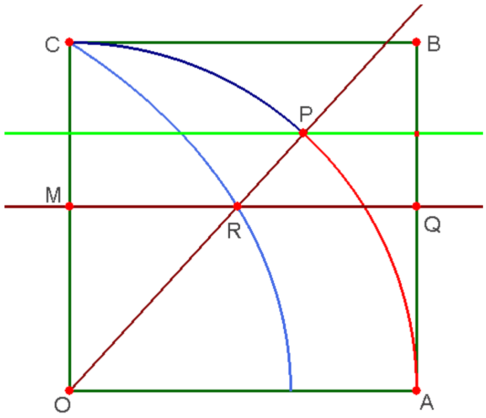
Una recta es horizontal y se mueve a velocidad constante en dirección vertical.
Otra gira con velocidad constante.

En el instante inicial ambas rectas son perpendiculares y en el instante final coinciden.

Aunque su nombre es Cuadratriz, para nosotros debería ser Trisectriz, ya que la vamos a utilizar para trisecar un ángulo agudo. En realidad con esta curva se puede dividir un ángulo en un número cualquiera de partes iguales. Su ecuación es la siguiente: $x = y \operatorname{Cot}\left(\frac{\pi y}{2a}\right)$

Pasos para la construcción de la Cuadratriz de Hipías:

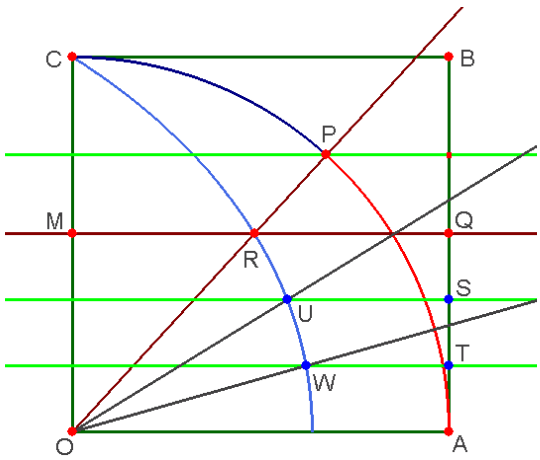
- Construimos el cuadrado de vértices O, A, B y C.
- Trazamos el ángulo AOP, el arco AP aumenta con velocidad constante.
- Trazamos una recta horizontal que cortará al lado OC del cuadrado en el punto M y el segmento OM debe aumentar con velocidad constante.
- Determinar la intersección R entre el rayo OP y la recta MQ (Ver figura).
- El lugar geométrico definido por R a medida que aumenta el ángulo AOP es la Cuadratriz de Hipías.



Trisección de un ángulo agudo con la Cuadratriz de Hipías.

Para trisecar un ángulo usando la Cuadratriz de Hipías, procedemos de la siguiente forma:

- Se divide el segmento AQ en tres partes iguales usando el teorema de Tales, consiguiendo los puntos T y S.
- Se trazan perpendiculares al segmento AB que pasen por S y T respectivamente, y se determinan las intersecciones U y W de estas rectas con la cuadratriz.
- Finalmente se trazan los rayos OW y OU, obteniéndose así la trisección del ángulo AOP.



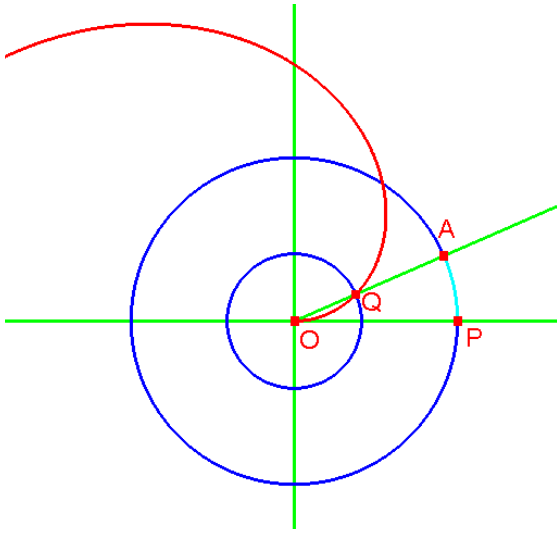
ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

La espiral de Arquímedes obtuvo su nombre del matemático Siciliano Arquímedes (S.3 a.C.). Se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a velocidad angular constante.

Su ecuación es la siguiente. $r = a\theta$

Pasos para la construcción de la Espiral de Arquímedes.

- Trazar una recta horizontal s
- Ubicar un punto O sobre la recta s.
- Trazar una circunferencia (de radio lo suficientemente grande) con centro en O.
- Marcar la intersección P (de la derecha) entre la circunferencia CO y .la recta s.
- Ubicar un punto A sobre la circunferencia y trazar la semirrecta que pasa por O y A.
- Trazar el menor arco entre los puntos P y A (llamémoslo arco PMA).
- Trazar una circunferencia Cm con centro en O y radio m(PMA).
- Marcar la intersección Q entre la semirrecta OA y la circunferencia Cm.
- El lugar geométrico que se genera por Q cuando se mueve A se llama Espiral de Arquímedes.

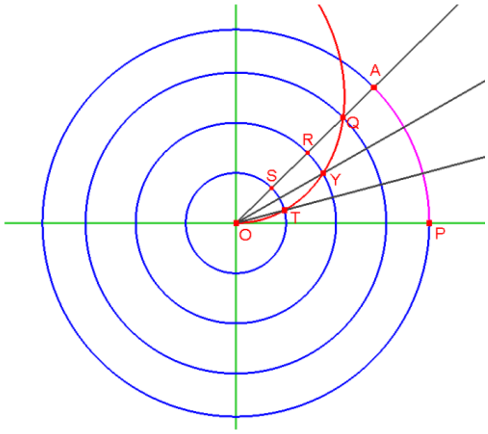


Trisección de un ángulo agudo usando la espiral de Arquímedes

Para trisecar un ángulo POA usando la Espiral de Arquímedes procedemos de la siguiente forma:

- Trisecar el segmento OQ (S y R son los puntos de trisección de OQ)
- Trazar las circunferencias concéntricas en O y radios OS y OR, respectivamente.

- Marcar las intersecciones T y Y entre las circunferencias anteriores y la espiral.
- Al trazar las semirrectas OT y OY se tiene la trisección del ángulo POA.



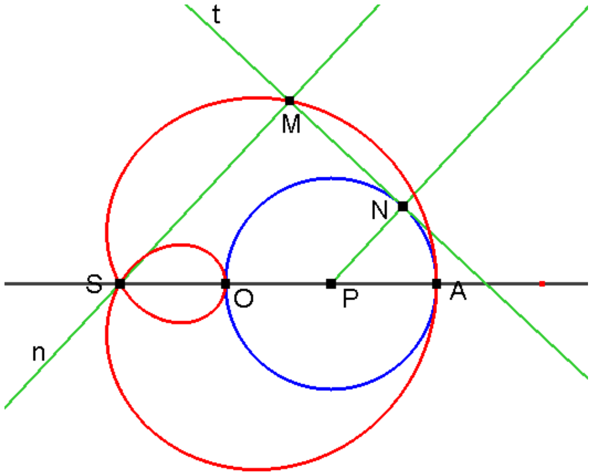
CARACOL DE PASCAL

El verdadero nombre de esta curva es Limaçon de Pascal (limaçon viene del latín limax que significa caracol). El caracol de Pascal, lo descubrió Etienne Pascal padre de Blaise Pascal en la primera mitad del siglo XVII y el nombre se lo dio Roberval en 1650 cuando la uso como ejemplo para mostrar su método para trazar tangentes.

La ecuación del Caracol de Pascal es la siguiente: $(x^2+y^2-2ax)^2=b^2(x^2+y^2)^2$

Pasos para obtener el caracol de Pascal

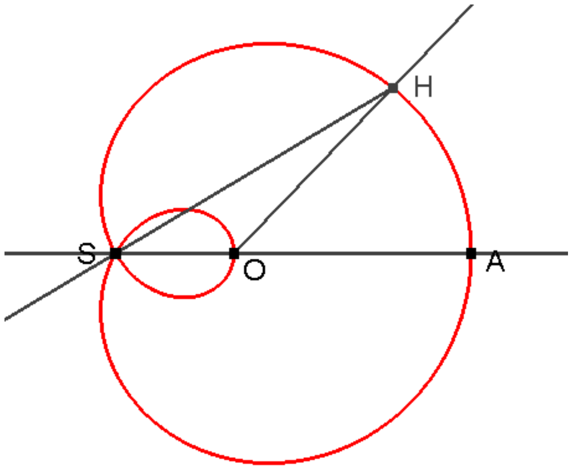
- Trazar una recta horizontal m.
- Trazar los puntos S, O, P y A de tal manera que SO = OP = PA.
- Trazar la circunferencia con centro en P y radio PA.
- Marcar un punto N sobre la circunferencia y trazar la semirrecta que pasa por P y N.
- Trazar una tangente t a la circunferencia CP por N.
- Trazar una perpendicular n a la recta t que pase por S y llamemos M a la intersección entre n y t.
- El lugar geométrico determinado por M cuando se mueve N es el Caracol de Pascal.



Trisección de un ángulo agudo usando la Trisectriz de Pascal

Para ver como la Trisectriz obtenida a partir del Caracol de Pascal proporciona la trisección del ángulo, seguimos los siguientes pasos:

- Ubicar un punto H sobre el caracol.
- Trazar la semirrecta OH y la semirrecta HS.
- El ángulo OHS es 1/3 del ángulo AOH.

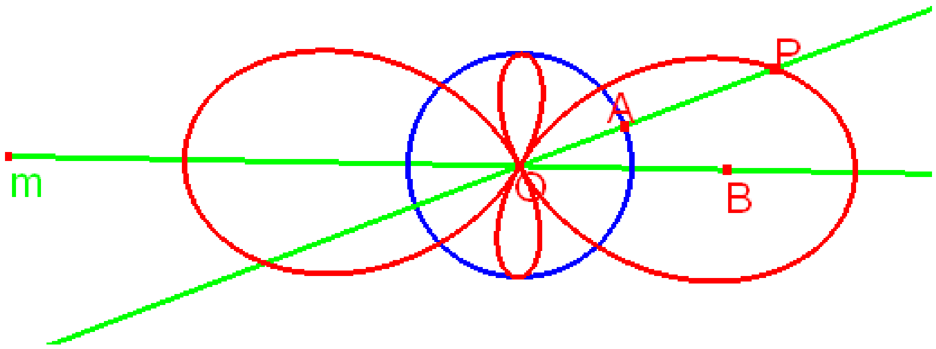


LA CICLOIDE DE CEVA

La cicloide o trisectriz de Ceva fue un aparato mecánico inventado en 1699 por Tommaso Ceva. Su ecuación es la siguiente: $(x^2+y^2)^3=a^2(3x^2-y^2)^2$.

Los pasos para obtener la cicloide de Ceva:

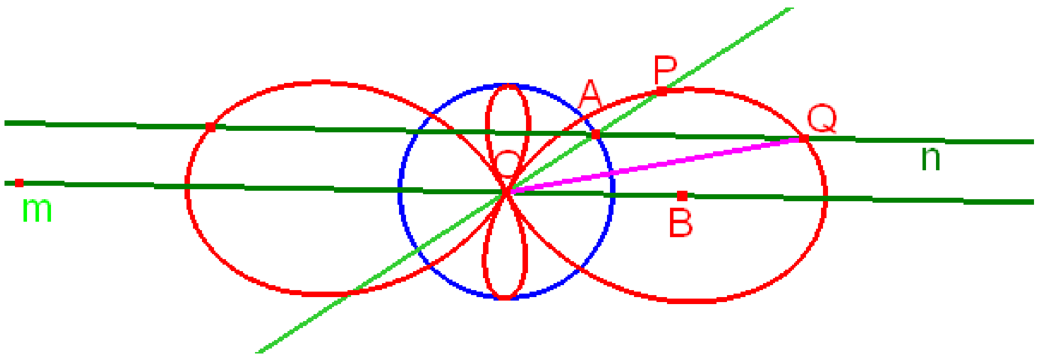
- Trazar una recta horizontal m.
- Ubicar un punto O sobre la recta m.
- Trazar una circunferencia con centro en O y radio 1.
- Ubicar un punto A sobre la circunferencia CO.
- Trazar la recta OA.
- Buscar dos puntos B y P, sobre las rectas m y OA respectivamente, tales que los segmentos OA=AB= BP. Se puede lograr trazando una circunferencia con centro en A y radio AO. La intersección de la circunferencia CA con la recta m es B. Se traza la circunferencia con centro en B y radio BA. La intersección de la recta OA y la circunferencia CB es P.
- El lugar geométrico que genera el punto P cuando se mueve el punto A se llama Cicloide de Ceva.



Trisección de un ángulo con la Trisectriz de Ceva.

Para trisecar el ángulo BOA se realizan los siguientes pasos:

- Trazar una recta n paralela a la recta m y que pase por el punto A.
- Hallar la intersección Q entre la recta n y el lugar geométrico.
- La medida del ángulo BOQ es la tercera parte de la medida del ángulo BOA.



TRISECTRIZ DE MACLAURIN

Esta curva fue estudiada por Colin MacLaurin (1698 a 1746) en 1742 cuatro años antes de morir, para intentar dar solución al problema de la trisección del ángulo de ahí su nombre de Trisectriz.

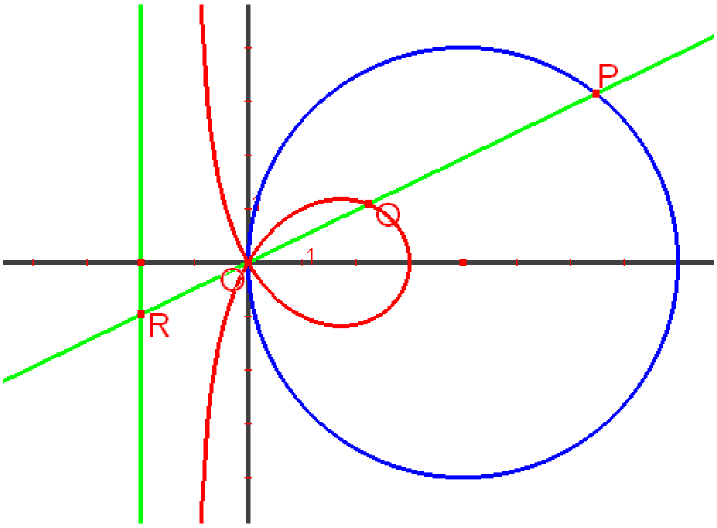
Hay que decir que efectivamente consiguió trisecar un ángulo pero no como los antiguos griegos querían, pues la curva que inventó no se puede trazar sólo con regla y compás, y aunque hoy en día con las nuevas tecnologías es realmente fácil dibujarla con mucha precisión, debemos reconocer el mérito de este hombre para dibujarla en sus tiempos.

Su ecuación cartesiana es: $x\ \ x^{2}+y^{2}\ ^{2}=a\ \ 3x^{2}-y^{2}$

Los pasos para obtener la Trisectriz de MacLaurin:

Para construir la trisectriz de MacLaurin necesitamos los siguientes elementos:

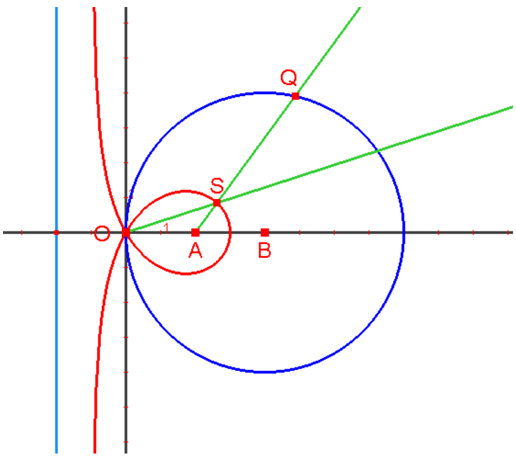
- Mostrar los ejes y tomar a = 1 (o cualquier otro valor).
- Trazar la recta x= -2a.
- Trazar una circunferencia con centro (4a, 0) y radio 4a.
- Ubicar el punto fijo O = (0,0).
- Ubicar un punto P sobre la circunferencia.
- Trazar la recta PO y llamemos R al punto donde se corta a la recta PO con la recta x= -2a.
- Hallar el punto medio Q del segmento PR.
- El lugar geométrico generado por el punto Q cuando se mueve el punto P se llama trisectriz de MacLaurin.



Trisección de un ángulo agudo con la Trisectriz de MacLaurin

Para trisecar un ángulo usando la Trisectriz de MacLaurin, procedemos de la siguiente forma:

- Ocultar la recta OP.
- Colocar el vértice del ángulo en el punto A=(2a, 0).
- Ubicar un punto Q sobre la circunferencia y trazar la semirrecta AQ (así tendremos el ángulo BAQ).
- Llamemos S a la intersección de la semirrecta AQ con la Trisectriz de MacLaurin y trazamos la semirrecta OS, obteniéndose el ángulo AQS.
- El ángulo AQS es un tercio del ángulo BAQ.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, José. *Curvas en la historia*. España. Nivela Libros y Ediciones. 2006.

Lehmann, Charles. *Geometría Analítica*. México. Editorial Limusa. 1994.

http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

http://www.mathcurve.com/