

---

## MODELACIÓN Y VISUALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL MEDIADOS CON EL CABRI

(1) Luis Albeiro Zabala Jaramillo – (2) Luz Ángela Castañeda Bejarano

(1) [lzabala@udem.edu.co](mailto:lzabala@udem.edu.co) – (2) [lcastaneda@udem.edu.co](mailto:lcastaneda@udem.edu.co)

Departamento de Ciencias Básicas Universidad de Medellín. COLOMBIA

---

### RESUMEN

#### RESUMEN EJECUTIVO

Es sabido que en los primeros cursos de matemáticas a nivel universitario se evidencia la deficiencia académica traída por los estudiantes. Por esta razón se proyectan continuamente estrategias académicas para superar esta insuficiencia y adelantar el programa sin mayores frustraciones por parte de los estudiantes. Sin embargo, en este proceso de nivelación se dedica mucho tiempo en horas extras para el desarrollo de los contenidos básicos, a costa, en gran parte, del tiempo que debe emplearse para interpretar (visualizar), modelar, interactuar con la tecnología y hacerle tomar conciencia al estudiante sobre la utilidad de las matemáticas a nivel práctico; no significa lo anterior que se enseñe de manera inadecuada, sino que no se invierte tiempo suficiente a elementos esenciales del proceso aprendizaje.

Teniendo en cuenta lo anterior, y sabiendo que la Universidad de Medellín no es ajena a esta problemática, se plantea la presente propuesta de investigación, la cual pretende determinar el nivel de razonamiento y capacidades específicas que desarrolla un estudiante a través de la implementación del software Cabri haciendo uso de la modelación y visualización (interpretación) y a través del desarrollo de actividades dinámicas estudiantes-docente que serán socializadas y discutidas en el aula de clase con el manejo de los conceptos del Cálculo diferencial. La propuesta por tanto resalta en su aplicación metodológica tres elementos básicos: 1. Implementar el uso del Cabri en el aula de clase, de tal forma que el estudiante sea un ente activo en su proceso de aprendizaje, orientado por el docente para socializar los conceptos a partir de los conceptos previamente adquiridos por el estudiante. 2. Visualizar: Se refiere a “interpretar” los conceptos en forma ágil y coherente. En la propuesta esta interpretación se evidenciará en los estudiantes en la medida que elaboren conceptos

matemáticos en Cabri acorde a una situación problemática planteada. 3. Modelar: Se pretende que el estudiante con el software Cabri pase por el proceso completo que va desde enfrentarse a una situación problema hasta crear un modelo matemático (Proceso denominado, Modelación matemática).

Las tres metodologías se basan en la corriente pedagógica aprendizaje significativo según Ausubel, los mediadores de Vigotsky y la visualización de Miguel de Guzman.

Con la aplicación de esta propuesta a los estudiantes de Cálculo Diferencial de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín, se espera: 1.- Que los alumnos sean más independientes, propositivos y usuarios activos de las herramientas tecnológicas que ofrece el medio actual. 2.- Que los alumnos maximicen el uso de los recursos de la Universidad y utilicen el recurso en el desarrollo de las clases con una metodología distinta a la tradicional. 3.- Minimizar la deserción estudiantil en los cursos de Cálculo diferencial.

## DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

### JUSTIFICACIÓN

En el ámbito escolar es imperativo que el estudiante alcance su propio aprendizaje, para esto se requiere la aplicación de nuevas metodologías en el aula de clase, pues se busca utilizar eficazmente el tiempo en el trabajo académico (economía de tiempo) con los estudiantes, para que éstos se dediquen más a la interpretación (visualización) y asimilación de los conceptos. De esta se les facilitaría a los estudiantes realizar el ejercicio de la modelación, utilizando mediadores (herramientas) en su proceso de auto-aprendizaje a partir de problemas reales.

Existen diferentes teorías admitida por toda la comunidad educativa, .que estudian cómo alcanzar resultados plausibles utilizando procesos asociados al aprendizaje significativo.

Se considera que con los textos actuales el estudiante adquiera un aprendizaje significativo y para ello existe una gran cantidad de textos de cálculo que están

propiciando no sólo la incorporación de mediadores (software, calculadora, etc) en la enseñanza del cálculo, sino aplicando estrategias para interpretar (visualizar) y llevar dicha interpretación a un modelo matemático (modelación) más acorde con la realidad y la formación de los alumnos.

De otra parte, los mediadores potencian y explicitan las posibilidades numéricas, gráficas y simbólicas de un problema; ello nos permite encontrar distintas soluciones, al poder variar los parámetros, comparar y contrastar resultados y lo que es más importante: Nos impulsan a darle una nueva explicación a lo que hemos visualizado.

Una evidencia en el ámbito educativo con respecto al aprendizaje eficiente se revela a través de propuestas metodológicas experimentales, ya que éstas enfatizan el "aprender haciendo":

Hay que tener en cuenta que la estructura de actividades dinámicas usando Cabri en este proyecto se enfatiza en el aprender haciendo. "Es un sistema basado en el aprendizaje activo y focalizado en el proceso de aprendizaje, más que en un proceso de enseñanza."<sup>1</sup> .

Las investigaciones en educación matemática, hoy en día, tienden a modificar la forma de enseñanza tradicional, buscando que el estudiante más que memorizar, razone acerca de los conceptos de una forma más eficaz. Es así, como las nuevas tecnologías ejercen gran influencia en el quehacer educativo. En el trabajo de investigación se pretende que el uso de la tecnología dinamice notablemente las actividades para el desarrollo de los contenidos de cálculo diferencial. Para esto basta mirar el tiempo de reacción entre una actividad dinámica y la posibilidad de trabajo colectivo que se asocia a la multiplicidad de soluciones.

Son muchos los campos de la matemática que vienen recibiendo en las últimas décadas importantes aportaciones obtenidas gracias a las nuevas tecnologías. Se hace así imprescindible el uso sistémico de mediadores, a fin de propiciar un mejoramiento en el proceso enseñanza aprendizaje, "...en la enseñanza, desde hace algún tiempo se viene trabajando en el desarrollo e incorporación de algunas experiencias de apoyo

---

<sup>1</sup> Ibid, p. 16,18.

informático" <sup>2</sup>. Si la introducción de estas nuevas tecnologías en la enseñanza se hace en forma arbitraria y sin una buena reflexión previa se puede caer en consecuencias irreparables o simplemente seguir en forma tradicional.

Se trata pues de utilizar el mediador , como lo llamó Vygotsky, en forma dinámica y en actividades regulares de clase, en las cuales se haga el ejercicio de la reflexión sobre lo modelado, se sistematice lo que se vaya descubriendo, para contrastarlo con otros entornos y en otros momentos. Lo anterior se diferencia de lo tradicional que consiste en memorizar las estructuras (Modelos lineales, cuadráticos, cúbicos, etc) y aplicarlas después. En el trabajo de investigación se pretende que el estudiante tenga una participación en clase a través de actividades dinámicas con el software Cabri.

De hecho García nos confirma que: "...Una forma de enseñanza eficiente debería contemplar no sólo la presentación de conceptos y resultados con las correspondientes técnicas del cálculo, sino también un entrenamiento de la intuición, que permita al alumno descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones" <sup>3</sup>

Con frecuencia se alude a la falta de tiempo para madurar suficientemente los conceptos y asimilar las características de los distintos objetos matemáticos. Las nuevas tecnologías permiten una especie de proceso de simulación, que facilita, en menos tiempo, el estudio de diferentes situaciones y la experimentación a bajo costo.

El mediador, en la medida que es utilizado, aporta un mayor nivel de confianza en los alumnos, se familiarizan con él, lo cambian o lo dejan, se fabrican su propia estrategia y ¿por qué no?, como en la guerra, cada estrategia "se fabrica un modelo de adversario."

---

<sup>2</sup> GARCIA,Alfonsa; MARTINEZ,Alfredo y MIÑANO, Rafael. Nuevas Tecnologías y enseñanzas de las matemáticas. Madrid, síntesis, 2000. p.20.

<sup>3</sup> Ibid., p.20

## PREGUNTA PROBLEMA

¿Cómo es que a través de la implementación del Cabri haciendo uso de la modelación y visualización para el manejo de los conceptos en el Cálculo Diferencial, los estudiantes avanzan en el desarrollo de un razonamiento y capacidades específicas?

## MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

En Educación Matemática actualmente, se buscan estrategias de aprendizaje a través de la visualización, modelación y uso de la tecnología con el fin de crear individuos más independientes de su proceso aprendizaje en los conceptos del Cálculo Diferencial, donde se requiere “manipular” el concepto como tal más que realizar simples cálculos. Purcell por ejemplo, recomienda: “...hagan los cálculos que puedan realizarse con facilidad a mano y sin una calculadora, especialmente si éstos permiten una respuesta exacta”; en otro aparte dice este mismo autor; “...el proceso de estimación es sólo sentido común organizado, combinado con aproximaciones razonables de los números”<sup>4</sup>.

Simóns<sup>5</sup> así mismo, habla de áreas del cálculo en las cuales se puede, sin sustituir el pensamiento y el aprendizaje matemático, usar la calculadora para esbozar las gráficas de funciones, haciendo el ejercicio del pensamiento como parte fundamental de las matemáticas. De igual manera, el autor hace hincapié en la motivación y comprensión intuitiva del cálculo tendiente a estructurar nuevas situaciones que conduzcan a desarrollos más sistémicos y generales, con los cuales, el estudiante se acostumbre cotidianamente a identificar el comportamiento de las variables, a visualizar las variables dependientes e independientes y a crear modelos que relacionen tales variables.

De otra parte, los mediadores potencian y explicitan las posibilidades numéricas, gráficas y simbólicas de un problema, permiten encontrar distintas soluciones al poder

---

<sup>4</sup> RIGDON, Varbery. Cálculo. México, Prentice Hall, 2001. p.9

<sup>5</sup> SIMMONS, George F. Métodos del cálculo y geometría analítica.. McGraw Hill, 2002

variar los parámetros, comparar y contrastar resultados y lo que es más importante, impulsan a darle una nueva explicación a lo que se ha visualizado.

Hay que tener en cuenta que la estructura de actividades dinámicas con mediadores se enfatiza en el aprender haciendo; "...es un sistema basado en el aprendizaje activo y focalizado en el proceso de aprendizaje, más que en un proceso de enseñanza."<sup>6</sup>.

Se ve claro entonces, que las metodologías de aprendizaje requieren del uso de mediadores y la participación activa del estudiante para interpretar, modelar y enfrentarse a soluciones de problemas que conduzcan a los estudiantes a adquirir un aprendizaje significativo.

### **EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO SEGÚN AUSUBEL**

Para David Ausubel, es en el aprendizaje donde el alumno relaciona lo que ya sabe con los nuevos conocimientos, es decir sus experiencias representan un factor de mucha peso, es por ello que el docente debe enfocar su labor facilitadora y enseñar en consecuencia de lo que descubra sobre lo que el alumno ya conoce.

Ausubel plantea que, "...el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por estructura cognitiva, al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización."<sup>7</sup>

Para la matemática este tipo de aprendizaje representa un modo eficaz para lograr que los conocimientos sean aprendidos significativamente con base en experiencias del alumno, ello significa que antes del aprendizaje de un concepto matemático el docente debe explorar lo que el alumno conoce sobre el tema, solo así determinará si los conocimientos previos le permitirán construir con mayor facilidad los nuevos conocimientos e integrarlos a sus estructuras cognitivas.

<sup>6</sup>FIOL; Luisa; Fortuny,Aymemi y Josep M. Proporcionalidad directa: La forma y el número. En MATEMÁTICAS: Cultura y aprendizaje, No 20. Madrid, Síntesis, 1990. p. 16,18

<sup>7</sup>[www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/ausubel/](http://www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/ausubel/)

Para aprender significativamente, se debe buscar que el alumno construya su propio aprendizaje, llevándolo hacia la autonomía, al momento de pensar de modo tal, que desarrolle su inteligencia, relacionando de manera integral lo que tiene y conoce respecto a lo que quiere aprender.

El aprendizaje significativo persigue entre otros aspectos, romper con el tradicionalismo memorístico que busca y desarrolla solamente la memoria y la repetición; de igual manera, se preocupa por los intereses, necesidades y otros aspectos para que el deseo de aprender del alumno tenga significado y sea valioso para él, de allí se derivan, claro está, el interés por el trabajo y las experiencias en el aula.

Se sabe además que si el aprendizaje se logra de modo memorístico y mediante la repetición, al poco tiempo se olvidará siendo este efecto más notorio en la parte matemática; esto obedece a que los nuevos conocimientos se incorporarían en forma arbitraria en la estructura cognitiva del alumno y, él no lograría integrar los nuevos conocimientos con los previos, es por esto entonces, que el alumno no concede valor a los contenidos presentados por el profesor y solo estudian para el momento. Por su parte, el aprendizaje significativo como se construye basado en lo que el alumno conoce, éste puede desarrollar las habilidades de pensamiento más rápidamente.

### LOS MEDIADORES DE VIGOTSKY

Vigotsky considera, "...que el sujeto humano actúa sobre la realidad para adaptarse a ella transformándola y transformándose a sí mismo a través de unos instrumentos psicológicos que denomina mediadores. Este fenómeno, denominado mediación instrumental, es llevado a cabo a través de herramientas (mediadores simples, como los recursos materiales) y de signos (mediadores más sofisticados, siendo el lenguaje el signo principal). También establece que la actividad es un conjunto de acciones culturalmente determinadas y contextualizadas que se llevan a cabo en cooperación con otros y la actividad del sujeto en desarrollo es una actividad mediada socialmente".<sup>8</sup>

<sup>8</sup> <http://www.monografias.com/trabajos14/cognitivismo/cognitivismo.shtml> 22 de septiembre de 2007. Hora 11:11 a.m.

Los mediadores según Vigotsky determinan la forma como aprende el alumno, además, hacen referencia concreta a todos aquellos elementos de trabajo del alumno y el docente: Los signos: el lenguaje oral y los símbolos, las herramientas: lápiz, taller, software.... Según Vigotsky, "...tanto el uso de signos como el de herramientas comparten algunas importantes propiedades; ambos incluyen una actividad mediata, sin embargo, también difieren el uno del otro, los signos están internamente orientados y constituyen un medio de influencia psicológica destinado al dominio de uno mismo; por su parte, las herramientas están externamente orientadas, destinadas a dominar y triunfar sobre la naturaleza.".<sup>9</sup>

### LA VISUALIZACIÓN DE MIGUEL DE GUZMÁN

La visualización en matemáticas es distinta al concepto dado por la psicología, Para ésta, la visualización es una técnica entroncada en el análisis transaccional que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos.

Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa; las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representarla muy provechosa en las tareas de presentación, manejo de conceptos, métodos y en la manipulación con ellos para la resolución de problemas.

"La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta."<sup>10</sup>

Las ideas básicas del análisis elemental, por ejemplo: orden, distancia, operaciones entre números, nacen de situaciones bien concretas y visuales. Lo mismo sucede con otras partes aparentemente más abstractas de la matemática; esta forma de

<sup>9</sup> VIGOTSKY Lev.S. Procesos Psicológicos Superiores. Córcega, Crítica, 1979. p.191

<sup>10</sup> DE GUZMAN, Miguel. Op.cit., p.18



actuar explícita las representaciones concretas, por cuanto devela las relaciones abstractas que al matemático interesan, constituyen lo que es denominado visualización en matemáticas.

En este orden de ideas, las matemáticas tratan de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante procesos de matematización. En ésta se produce inicialmente la percepción de ciertas semejanzas que lleva a captar lo común y abstraíble para luego someterlo a una elaboración racional y simbólica que permite manejar más claramente la estructura subyacente de tales percepciones. Es por ello que los docentes de matemáticas a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de representación con que acompañan su trabajo. Adquieren así intuitivamente un conjunto de reflejos, que lo familiarizan con el objeto permitiéndoles una visión unitaria de las relaciones entre objetos en estudio.

El Papel de la Visualización en el Análisis Matemático Según Miguel de Guzmán. La imagen, tiene papeles muy diferentes e importantes en el quehacer de los matemáticos. La imagen frecuentemente: 1. Estimula problemas de interés relacionados con los objetos de la teoría. 2. Sugiere relaciones un tanto ocultas, capaces de conducir hacia la resolución de problemas y hacia la construcción de la teoría. 3. Ayuda a la retención de la forma unitaria y sintética de los contextos que surgen recurrentemente en el trabajo. 4. Vehiculiza la transmisión rápida y eficaz transmisión rápida 5. Ayuda poderosamente en la actividad subconsciente en torno a los problemas complicados de la teoría.

## OBJETIVOS

### GENERAL

Determinar el nivel de razonamiento y capacidades específicas que desarrolla un estudiante a través de la implementación del software Cabri -haciendo uso de la modelación y visualización- en el manejo de los conceptos del Cálculo Diferencial.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Utilizar Cabri como herramienta mediadora del desarrollo de habilidades de razonamiento.
2. Interpretar los conceptos de cálculo diferencial a través de la modelación matemática.
3. Identificar mediante la visualización los criterios y conceptos matemáticos en cálculo diferencial.
4. Desarrollar la capacidad argumentativa de los conceptos del cálculo diferencial mediante la modelación y visualización.
5. Comparar los resultados académicos dados en los grupos control y experimental

## HIPOTESIS Y SUPUESTOS

**H1:** Los estudiantes desarrollan razonamientos y capacidades específicas través de la implementación del software Cabri -haciendo uso de la modelación y visualización- en el manejo de los conceptos del Cálculo Diferencial.

**H2:** Los estudiantes no desarrollan razonamientos y capacidades específicas través de la implementación del software Cabri -haciendo uso de la modelación y visualización- en el manejo de los conceptos del Cálculo Diferencial.

## METODOLOGÍA

Tipo de Estudio: Cuantitativo- enfoque empírico analítico.

**Diseño Experimental:** diseño con grupos experimentales y grupos de control con mediciones antes y después de aplicar la metodología

El trabajo de investigación utilizará dos grupos experimentales y dos grupos control; los cuatro grupos están conformados por estudiantes de cálculo diferencial de la UNIVERSIDAD DE MEDELLIN los cuales desarrollarán los mismo temas. Se compararan los resultados antes y después entre los grupos experimentales y los grupos control a través de pruebas pre-test (antes) y pos-test (después). Los resultados de estas pruebas se utilizarán para el análisis estadístico de la investigación: se tomarán como variables respuesta los promedios de las notas pre-test y pos-test.

**Población:** Estudiantes de la asignatura Cálculo Diferencial adscrita al Departamento de Ciencias Básicas de la universidad de Medellín

**Técnica de Muestreo:** No probabilístico –intencional- ya que los grupos serán asignados previamente.

**Técnicas e Instrumentos:** Utilización del Software Cabri para la aplicación de los conceptos del Cálculo Diferencial, ésta se evaluará mediante exámenes permanentes. Cuatro notas de 10%, la Nota del Parcial y el Final.

### PROCEDIMIENTO:

Fases de la Investigación.

La investigación se desarrollará en dos fases: La primera se refiere al estudio de documentos referenciados, búsqueda y elaboración de sesiones con actividades dinámicas. La segunda fase se refiere a mostrar los resultados (parciales y totales) del proyecto.

### BIBLIOGRAFIA.

**Leithold, Louis.** *El Cálculo*. México: Oxford, 1994.

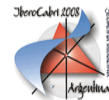
**Hoffmann, Laurence D.** *Cálculo Aplicado para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill, 2004.

**DE GUZMÁN, Miguel.** *El rincón de la Pizarra: Ensayos de Visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide, 2001, p.11-41.

**DUVAL, Raymond.** *Semiosis y Pensamiento Matemático: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Instituto de Educación y Pedagogía, 2004, 34 p.

**GARCIA, Alfonsa et-al.** *Nuevas Tecnologías y enseñanzas de las matemáticas*. Madrid: Síntesis, 2000, 20 p.

**JODAR SANCHEZ, Lucas.** *Modelización: El puente entre las matemáticas y el mundo real*. España, Universidad Politécnica de Valencia, 2002, p.94,95.



**JOLIBERT, Josette.** *El vaivén permanente en una construcción recíproca*  
En: Educación y Pedagogía, No 7, Bogotá: Magisterio, (febrero 2004). p.8

**KASNER Edward, NEWMAN James.** *Matemáticas e Imaginación Argentina*,  
Hispanamerica, 1967.

**LONDOÑO B, Oscar et-al.** *Manual de Estadística aplicada a la investigación cualitativa*. Medellín: Nicolás Aristizabal, 2002, p49, 129-154.

**MARTINEZ ARIAS, R.** *Psicometría: teoría de los test psicológicos y educativos*.  
Madrid: 1996.

**MATA, Guevara, Luis B.** *"Aprendizaje Significativo como Línea de Investigación"*,  
Maracaibo: Editorial Universo, 1994.

**MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL.** *Matemáticas Lineamientos curriculares: Áreas obligatorias y fundamentales*. Santa Fe de Bogotá: Magisterio, 1998. p.97-102.

**RIOS, Fabián et al.** *Modelos Didácticos diseñados con tecnología informática para la construcción y aprendizaje de conceptos básicos en ciencias naturales y matemáticas*. Medellín: s.e, 1999. p.22, 23.

**VIGOTSKY Lev. S.** *Procesos Psicológicos superiores*. Córdoba: Crítica, 1979.  
p.191, 1996

**VIGOTSKY, Lev.S.** *Obras Escogidas*. Madrid: Visor, 1991.