LA MÁQUINA DE DURERO… LA AVENTURA DE VIAJAR AL RENACIMIENTO

Oscar José Díaz

gogodiaz@arnet.com.ar

Instituto Superior de Formación Docente Nº 55. ARGENTINA

RESUMEN

Se presenta aquí la posibilidad de explorar con herramientas actuales (Cabri y Derive), el vínculo profundo entre la pintura y la matemática renacentista. Resulta fascinante contemplar el esfuerzo apasionado de los artistas del renacimiento, entre ellos, Brunelleschi, Alberti, Piero Della Francesca, Leonardo, Durero, comprometidos en la búsqueda de los conocimientos necesarios para capturar la realidad del espacio tridimensional en un lienzo de dos dimensiones. Esa búsqueda, no exenta de pasión, miserias y gloria, produjo como resultado una nueva herramienta matemática, el método de perspectiva central o cónica. Este descubrimiento fue el germen de otros conocimientos matemáticos, y contribuyó a instalar la búsqueda de nuevas formas de aproximarse al saber humano, acorde con el humanismo renacentista. Este trabajo consiste en: La construcción de un modelo virtual y otro real de una de las máquinas de dibujar conocidas como máquinas de Durero, cuya imagen quedo impresa en sus grabados. En esta construcción han aparecido sencillos e interesantes problemas que conectan la geometría sintética y el álgebra. También surge como consecuencia del trabajo simultáneo con modelos reales y virtuales, una actividad que conduce nuestro pensamiento en varias direcciones: hacia la didáctica, la creatividad y el razonamiento bajo sus diversas formas. Esta experiencia es el fruto del trabajo realizado en el curso de geometría 2007, como una primera aproximación a la geometría proyectiva.

"La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico. La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas.”

Miguel de Guzmán

INTRODUCCIÓN

El espíritu de los pintores del renacimiento, estuvo poderosamente influenciado por el deseo de captar el mundo real, y para lograrlo, tenían que poder pintar el mundo tridimensional en sus lienzos bidimensionales. Sabemos que la visión binocular es la que nos permite tener la sensación de profundidad. Pero los artistas del renacimiento se concentraron en lo que ve un solo ojo (intentado lograr la ilusión de la profundidad por medio del sombreado y la disminución progresiva de la intensidad de los colores con la distancia). Para obtener la imagen de una escena real sobre el cuadro, imaginemos como lo hicieron ellos, que interponemos entre ella y el ojo del observador un vidrio. Imaginemos luego, un punto en cada lugar donde las líneas de luz (proyección) atraviesan al mismo. Los pintores descubrieron que la figura formada por todos esos puntos (sección), es lo qué debían dibujar en el cuadro para crear en el ojo la impresión de estar observando la escena real. Durero empleo la palabra “perspectiva”, porque el verbo latino del que proviene, significa “examinar a fondo”. El uso de la perspectiva es la diferencia fundamental entre la pintura de la Edad Media y la del Renacimiento. Junto con la perspectiva surge también el estudio de las proyecciones y las secciones, que condujo finalmente al nacimiento de la geometría proyectiva. Alberto Durero**,** fue sin dudas un artista que ha ejercido una notable influencia en el arte renacentista. Dentro de su obra, encontramos la publicación de numerosos tratados, siempre acompañados por grabados, en los que intentó sistematizar sus observaciones sobre diversos temas, entre ellos, las proporciones del cuerpo humano y la perspectiva. Diseñó también máquinas de dibujar, es decir aparatos mecánicos que permiten dibujar escenas reales, empleando el sistema de perspectiva central o cónica, que se basa fundamentalmente en los conceptos de proyección y sección.

CONSTRUYENDO UNA DE LAS MÁQUINAS DE DURERO

MANUAL DE INSTRUCCIONES PARA EL EMPLEO CORRECTO DE LA MÁQUINA

En el siguiente grabado de Alberto Durero (figura 1), se detalla una máquina de dibujar, aparentemente diseñada por el, en base a modelos anteriores de otros pintores.

Entre sus elementos, vemos un cordel, que esta sujeto en uno de sus extremos a una aguja clavada en la pared. En el otro extremo del cordel, una clavija permite ubicar un punto del objeto a dibujar, tal como lo hace el operador. El cordel pasa por el interior de un marco de madera, sobre el cual se coloca el papel de dibujo. Una vez ubicada la clavija en un cierto punto del objeto, el lugar por donde pasa el cordel a través del marco, determina la ubicación de la imagen del punto considerado en el futuro cuadro. La posición del punto, se fija empleando dos hilos móviles que forman ángulos rectos al cruzarse, y luego se lo registra en el papel.

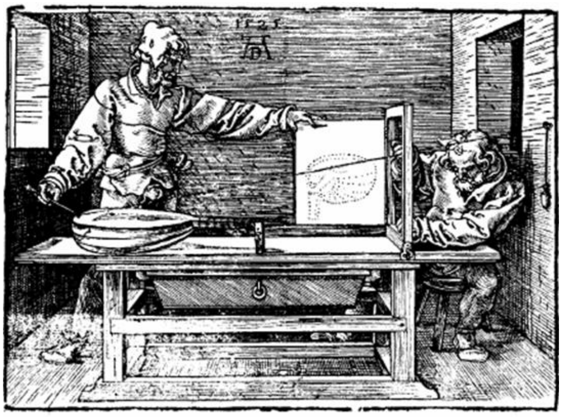
Repitiendo este procedimiento con los puntos más significativos del objeto, se puede obtener el dibujo en perspectiva del objeto.

CERTIFICADO DE GARANTIA

A los veinticinco días del mes de diciembre de 1519, se extiende el presente certificado de garantía, válido por un período de 500 años a partir de la fecha. Los pintores del renacimiento, no se responsabilizan de los daños que pueda ocasionar el mal uso de la máquina.

EXPLORANDO EL MODELO REAL

Observando el modelo real, trataremos de construir un modelo geométrico, que nos permita obtener la perspectiva de un punto del laúd, tal como el señalado en el grabado por la persona que sostiene el cordel contra el laúd. En lugar de un papel de dibujo, imaginemos que empleamos un soporte transparente de vidrio (u otro material).



Alberto Durero (1471.1528) "Artista dibujando un Laud"

Figura 1

Supondremos que el vidrio y la mesa tienen forma rectangular, y que el vidrio es perpendicular al plano de la mesa, y la base del mismo es perpendicular a los bordes de la misma. Llamemos N al punto del laúd al que está sujeto el cordel y del cual se quiere obtener la perspectiva, y llamemos T al punto donde el cordel está sujeto a la pared (que sustituye al ojo del observador o punto de vista).

Tracemos por N y T dos planos paralelos a la mesa donde está el laúd, y después un plano que represente el vidrio. Trazamos luego por N y T cuatro planos más, dos paralelos al vidrio y dos perpendiculares a la mesa y al vidrio a la vez.

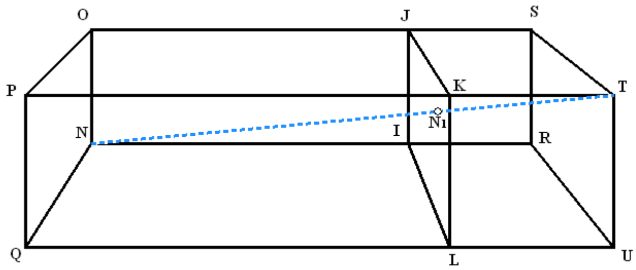


Figura 2

Si consideramos seis de los planos anteriores (excluimos el del vidrio), sus intersecciones tomándolos de a tres, determinan ocho puntos que llamaremos N, O, P, Q, R, S, T, U y que son los vértices de un paralelepípedo rectangular. Por otra parte el plano del vidrio determina con el mismo, una sección rectangular que designaremos como IJKL. La situación hasta aquí es como en la figura 2.

En esta primera aproximación, vemos el cordel NT, cuya longitud representa la distancia desde el ojo del observador (T) hasta el punto del laúd (N) que estamos considerando. Como NT es la diagonal del paralelepípedo y todos los puntos de la sección rectangular IJKL también pertenecen al mismo, la sección o vidrio y la diagonal o cordel se intersecan en un punto que denominamos N_1, y este punto es precisamente la perspectiva del punto N del laúd. El vidrio, puede desplazarse entre los planos paralelos al mismo que pasan por N (objeto observado) y T (ojo del observador) respectivamente, luego existen infinitas posibles perspectivas del punto N, tal como lo vemos en la figura 3.

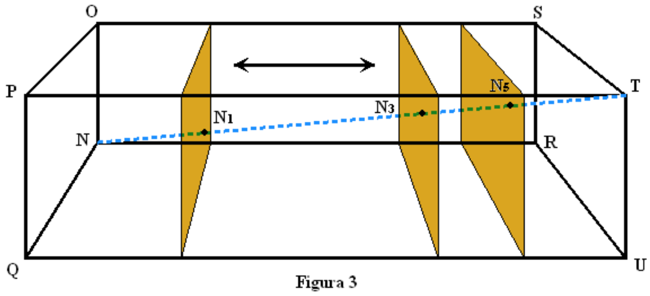


Figura 3

Nuestro objetivo, consiste ahora en encontrar y utilizar de manera adecuada, las herramientas matemáticas que nos permitan obtener la ubicación de N_1 sobre el vidrio. Luego el problema de la perspectiva central o cónica estará resuelto, pues el procedimiento que obtengamos será extensible a todos los puntos que deseemos.

Para determinar la posición del punto N_1, podemos valernos de dos procedimientos de naturaleza distinta. Uno algebraico y otro enmarcado dentro de la geometría sintética.

El segundo de ellos, es decir el geométrico, ha sido abordado numerosas veces por una diversidad de autores de distintas disciplinas(Matemática, arquitectura, pintura, ingeniería, etc). Voy a abocarme al primero de ellos, es decir le daré la problema un tratamiento algebraico. La idea básica, es entonces determinar las coordenadas de N_1 con respecto a un sistema de coordenadas ortogonales que podría tener el origen en uno de los cuatro vértices del vidrio (rectángulo IJKL), yo elegiré el vértice L con ese fin. Llegado a este punto, estoy tentado de descontextualizar el problema, es decir desvincularlo de su origen (obtener la perspectiva de un punto) y convertirlo en un problema de carácter mas general, que no permita en principio sospechar acerca de su origen ni vislumbrar una posible aplicación del mismo a situaciones de la realidad.

DESCONTEXTUALIZANDO Y GENERALIZANDO EL PROBLEMA

Ensayemos un enunciado para este primer problema, tal vez podría ser.

Problema 1

Dado un paralelepípedo rectangular, calcular las coordenadas de un punto determinado por la intersección de una diagonal principal del mismo, con un plano paralelo a una de sus caras. Considerar como origen de coordenadas uno de los vértices de la sección rectangular determinada por la intersección del plano y el paralelepípedo y considerar como ejes de coordenadas, las dos rectas que incluyen a los lados de la sección que tienen en común el vértice considerado.

Consideremos ahora un caso particular de este problema.

Problema 2

En la figura 4.A, el rectángulo IJKL representa la sección obtenida al intersecar el paralelepípedo rectangular NOPQRSTU con un plano paralelo a las caras NOPQ y RSTU.

Sabiendo que QL= 70 cm, UL= 45 cm, RU= 60 cm y TU = 50 cm. Calcular las coordenadas del punto N_1: $xN_1=N_2L$ e $yN_1= ML$, considerando el sistema de coordenadas indicado en la figura.

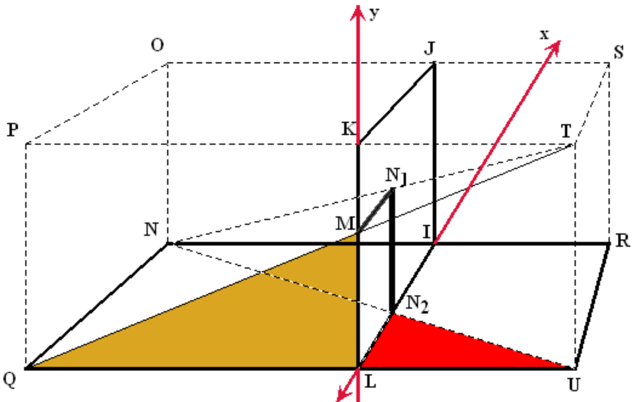


Figura 4.A

Solución del problema 2:

Observando la figura 4.A, vemos que en los triángulos rectángulos ΔNQU y ΔN_2LU el ángulo $N\hat{U}Q$ es común a ambos y por lo tanto son semejantes, luego se verifica que:

$$\frac{N_2L}{NQ}=\frac{UL}{UL+QL} \Rightarrow N_2L=NQ\left(\frac{UL}{UL+QL}\right)$$

Y como $xN_1=N_2L$ y NQ=RU, luego se obtiene:

$$x\,N_1 = RU\left(\frac{UL}{UL+QL}\right)=60\left(\frac{45}{45+70}\right)\cong 23{,}47$$

Considerando luego los triángulos rectángulos ΔTQU y ΔMQL y razonando de manera análoga, se obtiene:

$$yN_1 = ML = TU\left(\frac{QL}{QL+UL}\right)=50\left(\frac{70}{70+45}\right)\cong 30{,}43$$

Finalmente obtuvimos: N_1 = (x N_1; y N_1) = (23,47cm; 30,43cm).

CONTEXTUALIZANDO NUEVAMENTE EL PROBLEMA 2

Ya hemos resuelto el problema 2, llevémoslo nuevamente al contexto del que salió, es decir como respuesta al problema de usar la Máquina de Durero para obtener la perspectiva de un punto dado N.

Si analizamos la solución del problema, vemos que hemos obtenido x N_1 e y N_1 en función de la longitud de los segmentos RU, UL, QL y TU. Necesitamos entonces determinar que significan estos segmentos en relación a la estructura de la máquina de Durero y a los elementos que la conforman.

Hagamos un esquema sencillo del dibujo de la máquina realizado por Durero (figura 1), incorporando en la notación del problema 2, y luego observemos el mismo (figura 5) para tratar de visualizar el significado de cada uno de los segmentos que empleamos para resolver el problema.

N es un punto del laúd, y es precisamente el punto del cual queremos obtener la perspectiva N_1. T es el punto donde está sujeto el cordel y representa el ojo del observador o punto de vista de la perspectiva.

El segmento TN, es el cordel y representa la visual o el rayo de luz que va desde N (objeto observado) hasta T (ojo del observador).

Las longitudes de los segmentos considerados, adquieren entonces el siguiente significado:

Longitud de QL: representa la distancia del punto N (objeto observado) hasta el cuadro o vidrio (dNc).

Longitud de UL: representa la distancia del punto de vista T hasta el plano del cuadro o vidrio (dTc).

Longitud de TU: representa la altura del punto de vista T (ojo del observador) (hT).

Longitud de RU: representa la distancia entre el punto N y el plano perpendicular al cuadro que contiene al punto T (ojo del observador o punto de vista) (dNppc).

Además hemos empleado un sistema de coordenadas que tiene como origen el punto L, y ejes de abscisas y ordenadas, las rectas LI y LK respectivamente.

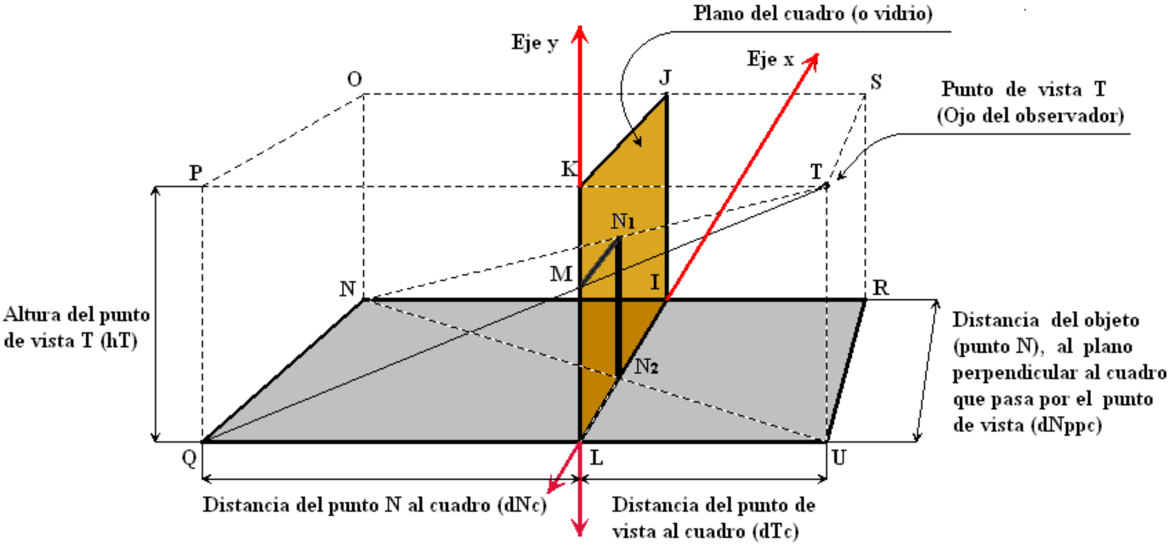


Figura 4B

En base a estos cuatro parámetros hemos obtenido las coordenadas del punto $N_1 = (xN_1; yN_1)$ = (23,47cm; 30,43cm), que es la perspectiva del punto N.

Esto nos permite dibujar N_1 sobre el cuadro (o vidrio), simplemente ubicando sus coordenadas con respecto al vértice L del mismo. Podemos extender el empleo de este procedimiento a la cantidad de puntos que deseemos, con lo cual podemos construir la perspectiva de un objeto cualquiera utilizando un conjunto finito de puntos.

Por supuesto, que resulta muy importante, elegir convenientemente los puntos del objeto, para poder determinar el dibujo empleando una cantidad mínima de ellos.

Se hace necesario entonces, encontrar recursos de carácter más general.

AMPLIANDO EL USO DE LAS HERRAMIENTAS ADQUIRIDAS

Nos proponemos el siguiente problema:

Problema 3

Dado un cubo ABCDEFGH ubicado de modo tal que la cara ABCD es paralela al cuadro. Obtener la perspectiva central del mismo (que denominaremos $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$), calculando las coordenadas de sus vértices. Disponemos de la siguiente información:

- Lado del cubo (l)=35 cm
- Distancia de A al plano del cuadro (dAc) = 50 cm
- Distancia del punto de vista T hasta el plano del cuadro (dTc) =70 cm
- Altura del punto de vista T (ojo del observador) (hT) = 95 cm
- Distancia entre A y el plano perpendicular al cuadro que contiene al punto T (ojo del observador)
  (dAppc) = 70 cm

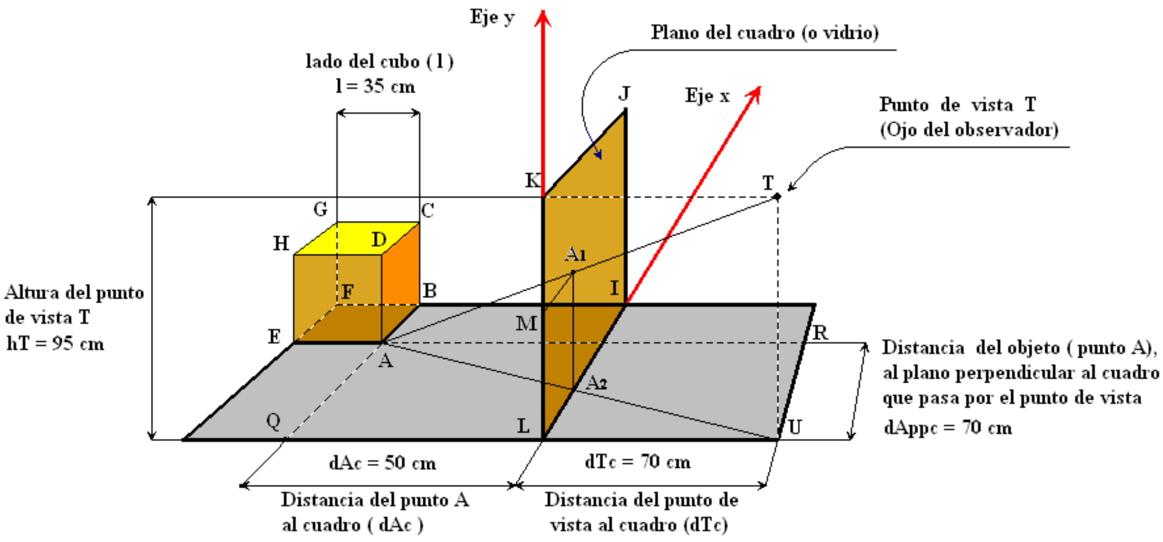


Figura 5

Solución del problema 3

Aplicando al punto A (figura 5) las expresiones que obtuvimos al resolver el problema 2, resultan las siguientes expresiones que nos permiten calcular las coordenadas de A_1 (perspectiva del punto A).

$$xA_1 = RU\left(\frac{UL}{UL+QL}\right) \quad \text{e} \quad yA_1 = TU\left(\frac{QL}{QL+UL}\right)$$

Observando la figura 5 y remplazando con el significado de cada segmento en las anteriores, obtenemos.

$$xA_1 = \left(\begin{array}{l}\text{Distancia del punto A al plano}\\ \text{perpendicular al cuadro que pasa}\\ \text{por el punto de vista}\end{array}\right) \text{ x } \left(\frac{\text{Distancia del punto de vista al cuadro}}{\text{Distancia del punto de vista al cuadro+ Distancia del punto A al cuadro}}\right)$$

$$yA_1 = \text{Altura del punto de vista x } \left(\frac{\text{Distancia del punto A al cuadro}}{\text{Distancia del punto A al cuadro + Distancia del punto de vista al cuadro}}\right)$$

Si en estas expresiones sustituimos con la notación establecida anteriormente (ver figura 5), resulta:

$$xA_1 = \text{ dAppc x } \left(\frac{dTc}{dTc + dAc}\right) \qquad \text{y} \qquad yA_1 = hT \text{ x } \left(\frac{dAc}{dAc + dTc}\right)$$

Luego para un punto dado A podemos obtener A_1 (xA_1, yA_1), que es la perspectiva del punto A determinada por sus coordenadas. Nos falta ahora, obtener las expresiones correspondientes a los puntos $B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$. Para averiguar las mismas, nos propondremos hacerlo en función de "dAppc, dAc, dTc, hT y l", que es la información mínima necesaria para resolver el problema dado. He realizado este trabajo, y obtuve las expresiones correspondientes para los puntos $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$. Luego, me pareció conveniente, recurrir a un software que me permita utilizarlas evitando hacer tediosos cálculos. Finalmente empleando Derive 5, obtuve una matriz que contiene las expresiones adecuadas para calcular las coordenadas de los ocho puntos $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$ de la perspectiva del cubo.(Por razones de espacio, no se presentan aquí los desarrollos correspondientes).

Matriz que contiene las expresiones que permiten calcular las coordenadas de los puntos A1,B1,C1, D1, E1, F1, G1 y H1.

$$\left[\begin{array}{c}
\textbf{MAQUINA DE DURERO}\\
\left[\left[xA1 = dAppc\ \frac{dTc}{dTc+dAc},\ yA1 = hT\ \frac{dAc}{dAc+dTc}\right]\right]\\
\left[\left[xB1 = (dAppc+l)\ \frac{dTc}{dTc+dAc},\ yB1 = hT\ \frac{dAc}{dAc+dTc}\right]\right]\\
\left[\left[xC1 = (dAppc+l)\ \frac{dTc}{dTc+dAc},\ yC1 = (hT-l)\ \frac{dAc}{dAc+dTc}+l\right]\right]\\
\left[\left[xD1 = dAppc\ \frac{dTc}{dTc+dAc},\ yD1 = (hT-l)\ \frac{dAc}{dAc+dTc}+l\right]\right]\\
\left[\left[xE1 = dAppc\ \frac{dTc}{dTc+dAc+l},\ yE1 = hT\ \frac{dAc+l}{dAc+l+dTc}\right]\right]\\
\left[\left[xF1 = (dAppc+l)\ \frac{dTc}{dTc+dAc+l},\ yF1 = hT\ \frac{dAc+l}{dAc+l+dTc}\right]\right]\\
\left[\left[xG1 = (dAppc+l)\ \frac{dTc}{dTc+dAc+l},\ yG1 = (hT-l)\ \frac{dAc+l}{dAc+l+dTc}+l\right]\right]\\
\left[\left[xH1 = dAppc\ \frac{dTc}{dTc+dAc+l},\ yH1 = (hT-l)\ \frac{dAc+l}{dAc+l+dTc}+l\right]\right]
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{DATOS}\\ [[dAppc = 70,\ dAc = 50,\ dTc = 70,\ hT = 95,\ l = 35]]\end{array}\right]$$

Sustituimos con los Datos anteriores en la matriz de la izquierda (denominada MAQUINA DE DURERO), simplificamos y obtenemos el siguiente resultado:

$$\left[\begin{array}{c}
\textbf{MAQUINA DE DURERO}\\
[[xA1=40.8333333333333,yA1=39.5833333333333]]\\
[[xB1=61.25,yB1=39.5833333333333]]\\
[[xC1=61.25,yC1=60]]\\
[[xD1=40.8333333333333,yD1=60]]\\
[[xE1=31.6129032258064,yE1=52.0967741935483]]\\
[[xF1=47.4193548387096,yF1=52.0967741935483]]\\
[[xG1=47.4193548387096,yG1=67.9032258064516]]\\
[[xH1=31.6129032258064,yH1=67.9032258064516]]
\end{array}\right]$$

En la matriz de la derecha se muestra la solución del problema 3, en ella se presentan los valores obtenidos correspondientes a las coordenadas de los puntos $A_{1,}$ $B_{1,}$ $C_{1,}$ $D_{1,}$ $E_{1,}$ $F_{1,}$ $G_{1,}$ $H_{1,}$ que nos permiten construir la perspectiva del cubo ABCDEFGH. Para ello bastará tomar un hoja de papel de tamaño adecuado, representar en el las coordenadas obtenidas, y luego dibujar la perspectiva.

Sin embargo, sería conveniente encontrar un modo de verificar que la perspectiva obtenida es correcta. Me parece que un camino interesante en esa dirección, puede ser realizar una validación empírica.

Para ello se propone resolver el siguiente problema.

Problema 4

Construir un modelo real de la maquina de Durero, empleando un soporte transparente (vidrio u otro material) para el cuadro. Representar en el cuadro las coordenadas de $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_{1.}$ Luego, observar desde el punto de vista, y comprobar si la perspectiva obtenida artificialmente, coincide con la imagen del objeto que vemos a través del vidrio.

Solución del problema 4

Obviamente es imposible presentar aquí la solución de este problema:

La construcción y el empleo de una máquina real, para comprobar si la perspectiva obtenida coincide con la imagen observada desde el punto de vista, implica una actividad manual y también el empleo de instrumentos de medición. En consecuencia, el resultado obtenido estará sujeto a los errores de toda medición.

Particularmente, he construido una versión de la máquina de Durero (sencilla y portátil) para realizar esta experiencia, y al observar desde el punto de vista, el resultado es muy convincente.

Hemos resuelto el problema 3 aplicándole un tratamiento algebraico, y el problema 4 permite una validación empírica del problema. Creo que entonces resultará interesante tener una solución obtenida por métodos geométricos, entonces planteamos el siguiente problema:

Problema 5

Empleando los conocimientos geométricos conocidos para construir una perspectiva (central, axonométrica u otra) y trabajando con alguna de las versiones del programa Cabri. Construir una "Maquina de Durero" virtual, de modo que pueda observarse el dibujo de la maquina y también el del objeto a dibujar.

La máquina debe posibilitar, obtener la perspectiva del cubo y las coordenadas de los puntos de la misma.

Las perspectivas realizadas por la maquina deben estar en escala 1:10, se establece esta condición, para poder trabajar en la pantalla de la computadora.

Una vez construida la maquina, realizar con ella las siguientes actividades:

a) Obtener la perspectiva $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ del cubo ABCDEFGH, empleando para ello la información que se utilizó para resolver el problema 3 y trabajar en escala 1:10.
b) Obtener las coordenadas de los puntos A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 F_1, G_1 y H_1.
c) Comparar las coordenadas obtenidas con las que se obtuvieron al resolver el problema 3.
d) Nota: Los valores de problema 5 están en escala 1:10, por lo tanto se deben multiplicar por 10 para poder compararlos con los del problema 3.

Solución del problema 5

Si observamos todos los desarrollos obtenidos hasta aquí, notaremos algo curioso. Se ha construido la perspectiva central de un cubo usando el programa Derive 5, pero en ningún momento han aparecido en nuestro trabajo términos como: puntos de fuga, horizonte, línea de tierra, etc. Estos términos representan conceptos esenciales de la perspectiva central o cónica, pero no han aparecido, porque al usar un método algebraico, no fue necesario emplear esos conceptos originalmente vinculados a la geometría sintética.

Ahora, abordaremos el problema, empleando el método para construir perspectivas centrales, utilizado tradicionalmente por arquitectos, ingenieros y pintores (antes del advenimiento de los programas de computación creados para ese fin), y en el cual se emplean herramientas euclidianas (regla y compás). Por razones de espacio, no se presentan aquí los conceptos teóricos de este método, que constituyen el fundamento de la siguiente construcción.

Usando el programa Cabri 2, he construido la siguiente máquina virtual (figura 6), que permite obtener la perspectiva $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ del cubo ABCDEFGH, y las coordenadas de los puntos $A_{1,}$ $B_{1,}$ $C_{1,}$ $D_{1,}$ $E_{1,}$ $F_{1,}$ $G_{1,}$ H_1. Designaremos a esta máquina, con el nombre "MV-Durero .Cabri", y se emplea del siguiente modo:

En la figura 6, se pueden ver los elementos principales de la máquina y también el cubo ABCDEFGH (objeto a dibujar). Para cada conjunto distinto de valores asignados a los parámetros (ver figura 6), obtendremos una perspectiva diferente del cubo y también las coordenadas de los puntos de la misma (ver figura 7).

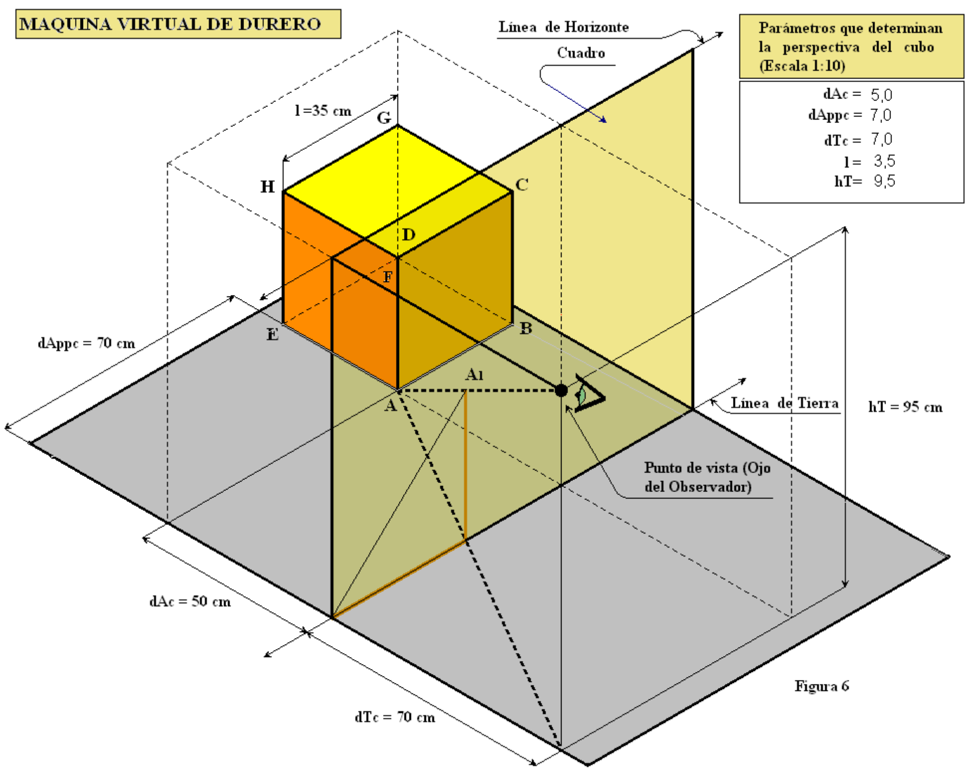
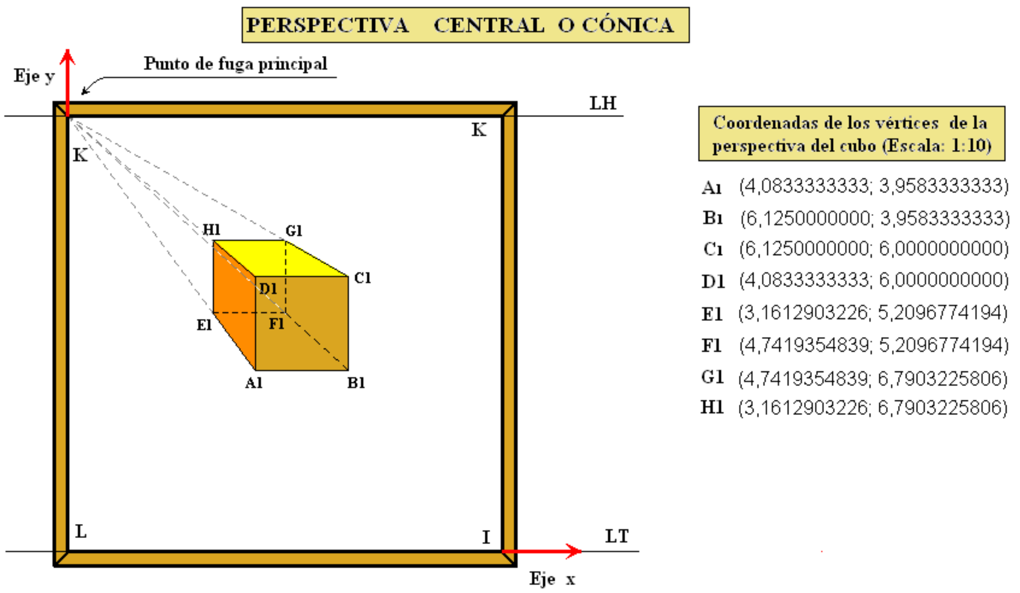


Figura 6

EMPLEANDO LA MAQUINA “MV-DURERO.CABRI” PARA OBTENER LA SOLUCIÓN

Antes de mostrar los resultados obtenidos con la máquina, es muy importante aclarar, que los valores que vemos en ella (figura 6): dAppc=70 cm, dAc=50 cm, dTc=70 cm, hT=95 cm y l=35 cm, son los datos del problema 3, y están en escala 1:1. Mientras que los valores de los parámetros que aparecen en la tabla de la derecha (figura 6), están en escala 1:10. Finalmente podemos ver la solución del problema 5, que se obtuvo cuando se ingresaron los valores de la tabla en la máquina:

a) La perspectiva $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ que vemos en la figura 7, esta imagen es semejante a la que
b) veríamos desde el punto de vista en la maquina real (esta representada en escala 1:10)
c) Las coordenadas de los puntos A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 F_1, G_1 y H_1 , que también vemos en la figura 7.
d) Al comparar las coordenadas obtenidas en los problemas 5 y 3, se observa que al multiplicar los valores obtenidos en el problema 5 por 10, se obtienen los valores del problema 3. Esto nos indica que la maquina “MV-Durero.Cabri” funciona correctamente.



PROBLEMAS PROPUESTOS:

En base a las herramientas que se construyeron para resolver los problemas 1 a 5, resolver los siguientes problemas:

A. Dada las siguientes coordenadas A_1(33,6; 35,2), B_1(47,6; 35,2), C1(47,6; 49,2), D_1(33,6; 49,2), E_1(28;42,7), F_1(39,7; 42,7),, G_1(39,7; 54,3), y H_1(28; 54,3), correspondientes a los vértices de la perspectiva de un cubo ABCDEFGH (que tiene una cara paralela al cuadro), y conociendo además la altura del punto de vista hT= 80 cm, y la distancia del punto de vista al cuadro dTc = 70 cm. Calcular la arista del cubo y las distancias de sus vértices al plano del cuadro y al plano perpendicular al cuadro que pasa por el punto de vista (T). Resolver algebraicamente y luego usar la máquina "MV-Durero.Cabri" para verificar los resultados. Emplear también una máquina real para realizar una validación empírica.

B. Consideremos los puntos A y C (del problema 3), sea R el punto medio del segmento AC, y sea S el punto medio del segmento RC. Empleando la información del problema 3, se pide:

a. Averiguar las coordenadas de los puntos A_1, R_1, S_1 y C_1.

b. Verificar algebraicamente y empleando la maquina "MV-Durero.Cabri", que: $\dfrac{SA/SR}{CA/CR} = \dfrac{S_1A_1/S_1R_1}{C_1A_1/C_1R_1}$

C. Construir una máquina virtual de Durero, empleando Cabri 3D.

BIBLIOGRAFÍA:

Boyer, C.B. *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad Textos (1996).

Guzmán, M. de. La experiencia de descubrir en geometría. Madrid: Nivola (2002).

Kline, M. *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.* México: Fondo de Cultura Económica (1992).

Newman, J. R. Sigma. El Mundo de las Matemáticas. (Volumen 4 – Cap.6 y 7). Barcelona: Grijalbo (1979).

Puig Adam, P. *Curso de Geometría Métrica (Tomo II)* . Madrid: Nuevas Graficas. SA (1961)

Se visito la siguiente página web: http://www.revistasuma.es. (Revista Suma Nº 48-Febrero 2005 pp.81-90) Nombre del artículo: Theatrum Machinarum- Matemáquinas en el Museo Universitario de Modena.