CABRI Vs. MÉTODO DABEJA

Daniel Bejarano Segura

dabejase@yahoo.es

Universidad de los Llanos Orientales. COLOMBIA

RESUMEN

¿Existe un método para evaluar las construcciones que realiza Cabri? El dinamismo de Cabri con las medidas, fomenta la percepción y permite relacionar la teoría geométrica como la del método Dabeja, cuya parametrización y demostraciones matemáticas alcanzan niveles de Rigor de los sistemas axiomáticos geométricos. El método Dabeja es una herramienta que permite construir, calcular y medir los valores en construcciones geométricas a través de los puntos coordenados y ordenados en el plano cartesiano ya que ha encontrado las ecuaciones de las figuras geométricas teniendo en cuenta las variables "ángulo de rotación, ángulo suplementario e interno, los lados, los vértices (puntos coordenados) y alturas entre otros".

PRESENTACIÓN

Al trabajar en el ambiente de Cabri los estudiantes de la Institución Educativa Iracá realizaron ejercicios de demostración de teoremas fundamentales de triángulos construyendo y realizando los procesos comúnmente empleados con regla y compás, el proceso de enseñanza se vio afectado al efectuar las mediciones de cada una de las partes que conforman el triángulo, ya que se les dijo que emplearan la herramienta de medición de Cabri, generando los valores de los segmentos, la altura, lados y los ángulos externos y suplementarios.

Pero la inquietud no estaba relacionada con el valor como tal, sino con la comprobación matemática de aquella medición a través de los siguientes interrogantes, ¿Cómo se que ese es el valor real si no puedo medir directamente con la regla? ¿Lo puedo medir en la pantalla? ¿Quién me garantiza el 100% que esa figura mide lo que muestra el valor? ¿Con que fórmula puedo comprobar las medidas? ¿Existe un método para comprobar esos valores? Interrogantes que hicieron detener el proceso de la clase y buscar la solución a estos interrogantes.

Esto permitió confrontar al nuevo método Dabeja con Cabri Géomètre desde las construcciones de las figuras geométricas y las medidas probatorias como medio para revisar la validez de las percepciones generadas de manera virtual o viceversa.

METODOLOGÍA

El proceso para su desarrollo fue el siguiente.

1. Reconocimiento del software Cabri Géomètre.
2. Construcción de los triángulos según sus lados y según sus ángulos en el plano cartesiano.
3. Medición de los lados, ángulos y altura de los triángulos empleando las herramientas de Cabri.
4. Comparación de estos resultados con el método Dabeja

Posteriormente se trabajaron los cuadriláteros y polígonos regulares empleando el mismo proceso en el plano cartesiano.

Se compararon los resultados en cada una de las construcciones.

A continuación se presenta de manera resumida el proceso que se dio para los triángulos.

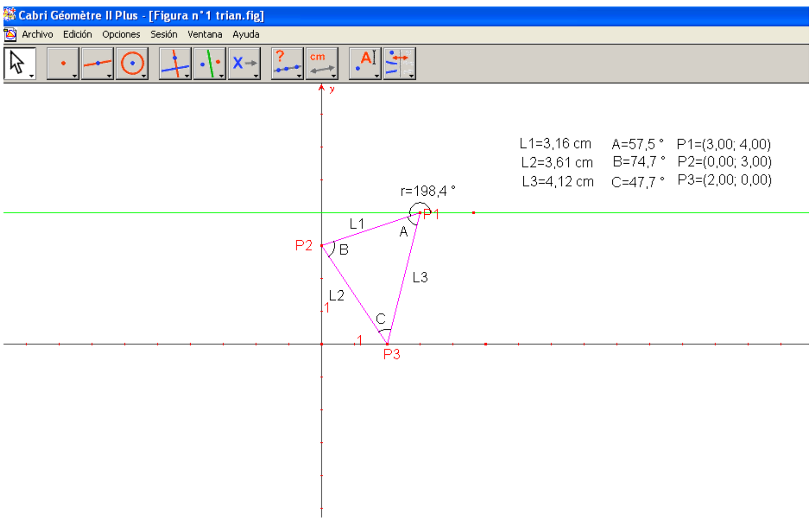


Figura 1. Se muestra la construcción de un triángulo y las medidas empleando Cabri

Después de tomar las medidas desde Cabri se permite al educando presentar la estructura formal de los triángulos a través del método Dabeja cuya parametrización se basa en coordenadas cartesianas para encontrar cada uno de los demás puntos coordenados "vértices del Triángulo" basados en los valores medidos desde Cabri. Empleando las fórmulas del método Dabeja para los tipos de triángulos se comparan estos resultados "recuerde que con el método Dabeja los valores son dados por usted", para el triángulo dado en la gráfica se toman los valores de manera aproximada:

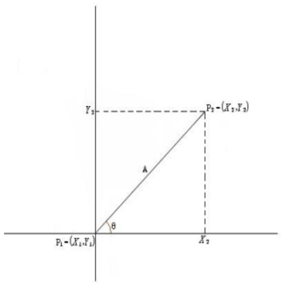
$P_1 = (3, 4)$ $\theta = 198.4\,^{o}$ $\omega = 105.3^{o}$ $L_1 = 3.16$ cm. $L_2 = 3.61$ cm.

$X2 = L_1 Cos\ \theta + X1$	$Y2 = L_1 Sen\ \theta + Y1$	P2(X2, Y2),
X2 = 3.16Cos (198.4) + 3= 0,0016	Y2 =3.16Sen (198.4) + 4=3,0025	$P_2 = (0, 3)$,
$X3 = L_2 Cos\ (\theta + \omega) + X2$	$Y3 = L_2 Sen\ (\theta + \omega) + Y2$	P3(X3, Y3)
X3=3.61Cos (198.4+105.3) + 0.0016	Y3 =3.61Sen (198.4+105.3) + 3.0025	$P_3 = (2, 0)$

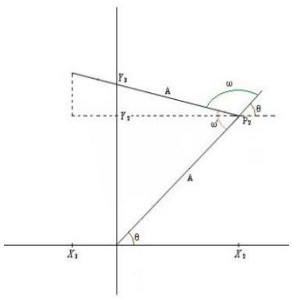
Posteriormente se orienta de manera dirigida a la demostración del método con el triángulo inicialmente propuesto para luego generalizar el sistema de los triángulos clasificados según sus ángulos y según sus lados. Las demostraciones empleando van paulatinamente aclarando cada una de las componentes que para su efecto intervienen en el proceso, conviniendo con los estudiantes la mejor forma de interpretación y análisis en la parametrización, teniendo en cuenta el proceso que desde la construcción dinámica con Cabri y sus medidas se ha llevado.

La demostración para el triángulo equilátero se presenta a continuación

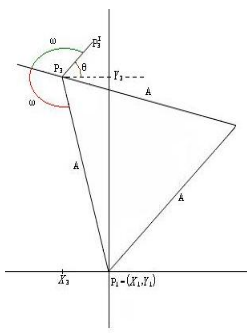
$$\overline{X_2X_1} = X_2 - X_1 \quad \overline{Y_2Y_1} = Y_2 - Y_1$$
$$\frac{\overline{X_2X_1}}{A} = COS\theta \quad \frac{\overline{Y_2Y_1}}{A} = SEN\theta$$
$$\overline{X_2X_1} = ACOS\theta \quad \overline{Y_2Y_1} = ASEN\theta$$
$$X_2 - X_1 = ACOS\theta \quad Y_2 - Y_1 = ASEN\theta$$
$$X_2 = ACOS\theta + X_1 \quad Y_2 = ASEN\theta + Y_1$$



$$\overline{X_3X_2} = X_3 - X_2 \quad \overline{Y_3Y_2} = Y_3 - Y_2$$
$$\frac{\overline{X_3X_2}}{A} = COS(\theta + \omega) \quad \frac{\overline{Y_3Y_2}}{A} = SEN(\theta + \omega)$$
$$X_3 - X_2 = ACOS(\theta + \omega) \quad Y_3 - Y_2 = ASEN(\theta + \omega)$$
$$X_3 = ACOS(\theta + \omega) + X_2 \quad Y_3 = ASEN(\theta + \omega) + Y_2$$



$$\overline{X_3X_1} = X_1 - X_3 \quad \overline{Y_3Y_1} = Y_1 - Y_3$$
$$\frac{\overline{X_3X_1}}{A} = COS(\theta + \omega + \omega) \quad \frac{\overline{Y_3Y_1}}{A} = SEN(\theta + \omega + \omega)$$
$$X_1 - X_3 = ACOS(\theta + 2\omega) \quad Y_1 - Y_3 = ASEN(\theta + 2\omega)$$
$$X_1 = ACOS(\theta + 2\omega) + X_3 \quad Y_1 = ASEN(\theta + 2\omega) + Y_3$$



En la fase de Orientación libre, los triángulos que se diseñaban por parte de los educandos desde cabri sin reconocer las medidas de sus componentes, solo permitían reconocer aproximadamente el movimiento rotacional con respecto de la horizontal del triángulo, al involucrar las fórmulas del método Dabeja para los triángulos diseñados en Cabri con sus respectivos valores, se comprobaba que los valores coincidían con los dados cuando se medían con Cabri, el proceso numérico se apoyaba con programas de calculo numérico y el software Dabeja para los triángulos..

Los programas de cálculo numérico, como Excel, permitieron realizar los cálculos operatorios de las variables de los triángulos para encontrar los puntos coordenados con las medidas generadas por Cabri, presentando a los educandos una mejor argumentación de todas las variables que intervienen en los triángulos y su construcción en el plano cartesiano.

CABRI					DABEJA				
X1	Y1	L1	L2	θ	X1	Y1	L1	L2	θ
3	4	3,16	3,61	198,4	3	4	3,16	3,61	198,4
X2	Y2	X3	Y3	w	X2	Y2	X3	Y3	w
0,00	3	2	0	105,3	0,0016	3.002549043	2.00454019	-0,00080534	105,3

Tabla 1. Resultados de las medidas de Cabri y Dabeja

En la tabla 1. Se han presentado los valores que desde Cabri se han medido empleando solo dos cifras decimales, para los valores de los lados y una para los ángulos de rotación y suplementario teniendo en cuenta que se grafica inicialmente el triángulo desconociendo cualquier valor de las componentes del triángulo, luego se emplea el método Dabeja con la ecuación del triángulo tomando los valores que Cabri ha medido, mostrando una pequeña diferencia en los puntos coordenados.

CABRI					DABEJA				
X1	Y1	L1	L2	θ	X1	Y1	L1	L2	θ
3	4	3,16227766	3,605551275	198,4349488 2	3	4	3,16227766	3,605551275	198,4349488 2
X2	Y2	X3	Y3	W	X2	Y2	X3	Y3	w
0,	3	2	0	105,2551187	0,00000000010 9	3,00000000020 6	1,99999999953 8	0,000000000383 6	105,2551187

Tabla 2. Resultados de las medidas de Cabri y Dabeja

En la tabla 2. Se amplían los valores decimales dados por cabri con los mismos valores iniciales, comparados con Dabeja la diferencia entre los valores es mínima. Luego se experimenta dejando que los estudiantes propongan los valores iniciales empleando Dabeja y posteriormente construya el triángulo deseado con Cabri, después se inicia la fase del discernimiento para que los estudiantes a través de las construcciones de otras figuras geométricas como cuadriláteros y polígonos regulares continúen el proceso de construcción visual, medición, demostración y formalismo de cada sistema de construcción geométrica.

A manera de ejemplo se presenta el caso para el pentágono regular, con las fórmulas del método para un polígono regular de cinco lados se tiene:

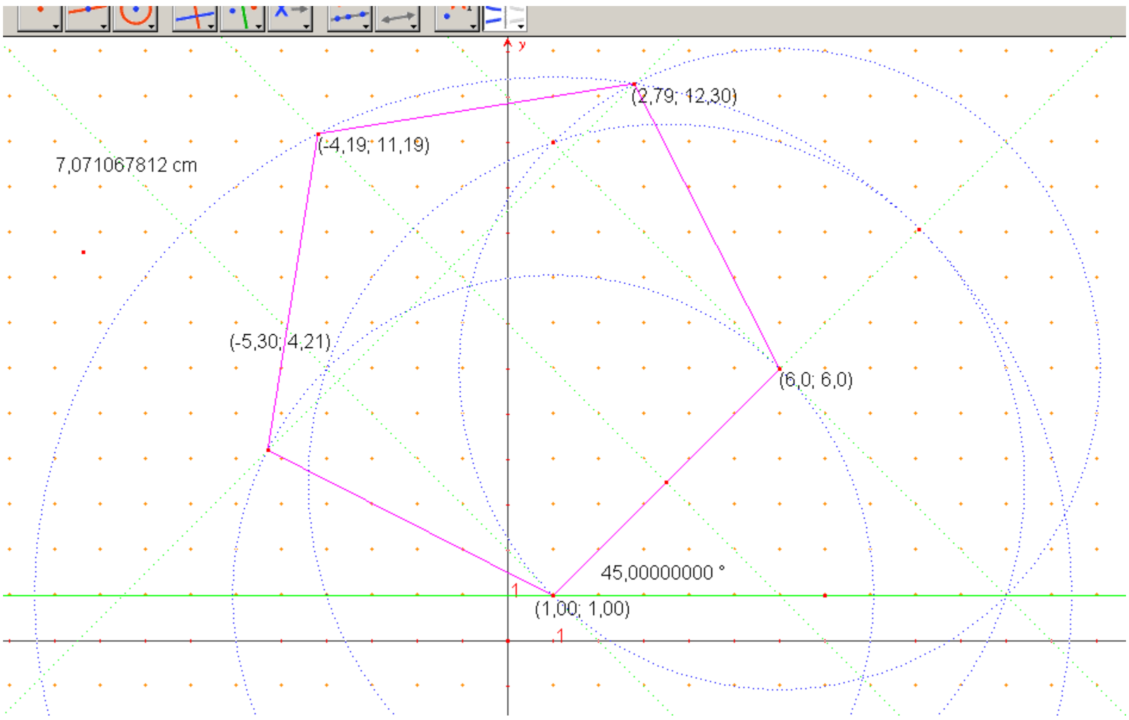
$P1 = (1, 1)$ L= 7,071067812 cm $\theta = 45º$ $\omega = (360º/5) = 72º$

$X2 = L\cos(\theta + K\omega) + X1$ $Y2 = L\,sen(\theta + K\omega) + Y1$ "K=n-2=2-2=0"
$X2 = 6{,}0000000000951$ $Y2 = 6{,}0000000000951$ P2= (6,6)

$X3 = L\cos(\theta + K\omega) + X2$ $Y3 = L\,sen(\theta + K\omega) + Y2$ "K=n-2=3-2=1"
$X3 = 2{,}78980239043302$ $Y3 = 12{,}3003675535655$ P3= (2.78, 12.3),

$X4 = L\cos(\theta + 2\omega) + X3$ $Y4 = L\,sen(\theta + 2\omega) + Y3$ "K=n-2=4-2=2"
$X4 = -4{,}19420884303695$ $Y4 = 11{,}19420884313210$ P4= (-4.19, 11.19)

$X5 = L\cos(\theta + 3\omega) + X4$ $Y5 = L\,sen(\theta + 3\omega) + Y4$ K=3
$X5 = -5{,}30036755347037$ $Y5 = 4{,}21019760966210$ P5= (-5.3, 4.21)



Los valores coinciden para los datos iniciales en todas las figuras que se construyeron desde Cabri en cualquier punto coordenado, con valores diferentes de los segmentos y rotados con cualquier valor real.

Marco Teórico

"La Geometría opera con "cuerpos geométricos" y figuras; estudia sus relaciones mutuas desde el punto de vista de la magnitud y la posición" Fernández y Otros, 1991. En la actualidad desde nuestro contexto curricular se propone el modelo de aprendizaje de Van Hiele (1986), que estructura el aprendizaje de la Geometría coherentemente con la construcción del espacio, junto al uso de las TIC´s en las aulas de clase que faciliten estos procesos. (MEN 1998).

Siguiendo orientaciones como las señaladas por Zorzoli, G. (Mateo y Ubal, 2001) se recomienda la enseñanza de la Geometría dirigida al desarrollo de habilidades específicas: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación**.**

- *Habilidades visuales*. Se refiere a la visualización, siempre se habla de una percepción con conceptualización. El desarrollo de habilidades visuales es de mayor importancia para el estudio del espacio.

Las habilidades relacionadas con la visualización tienen que ver con:

- *Coordinación visomotora*: es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.
- *Percepción figura-fondo*: el niño debe identificar aquello que permanece invariable (forma, tamaño, posición).
- *Percepción de la posición*: el niño debe ser capaz de establecer relaciones entre dos objetos.
- *Discriminación visual*: significa poder comparar dos imágenes muy similares y encontrar las diferencias.
- *Memoria visual*: es la habilidad de recordar un objeto que no permanece a la vista y relacionar o representar sus características.

Como actividad se puede proponer construir un cuerpo a partir de instrucciones dadas, o a la inversa, redactar un mensaje para que otro elabore o construya una figura o cuerpo determinado.

- Habilidades de dibujo. Son de 3 tipos:
    - *las de representación. Consisten en representar figuras o cuerpos con diferentes materiales (por ejemplo, representar un paralelogramo con varillas de distintas longitudes);*
    - *de reproducción. A partir de modelos dados, los alumnos deben hacer copias en iguales o distintos tamaños;*
    - *de construcción, sobre la base de pautas o datos dados en forma oral, escrita o gráfica, obtener una figura geométrica.*

Los procesos de construcción de las figuras geométricas hacen parte de los niveles de los Van Hiele en el nivel 1, que plantea:

NIVEL 1. (Análisis). Se comienza a analizar algunos conceptos geométricos usando para ello la observación y la experimentación. Los individuos pueden analizar las partes y propiedades particulares de las figuras y cuerpos. Estas primeras propiedades son usadas para conceptualizar las clases de figuras, y así las figuras serán reconocidas como un conjunto de partes y a la vez reconocidas por estas. Los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes.

NIVEL 2: (Ordenación o Clasificación). Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren. Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

NIVEL 3: (Deducción Formal) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado. Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, se tiene una visión globalizadora de las Matemáticas.

NIVEL 4: (Rigor) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías. Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

RESULTADOS

Al Comparar los valores de las componentes geométricas de las figuras medidos con Cabri con los valores del método Dabeja Difieren de la aproximación de cifras con la cual se presentan los datos.

La estructuración de las medidas generadas por cabri y posteriormente trabajadas con Dabeja permite pasar de una percepción visual dinámica a una deducción formal de la parametrización de las figuras geométricas bidimensionales.

Estructurar el formalismo geométrico es posible desde la construcción de las figuras geométricas de manera dinámica.

Al evaluar las medidas de Cabri con el método Dabeja el educando supera fácilmente los obstáculos de la visualización y el formalismo en las figuras como medio de comprobación.

REFERENCIAS

Jurgensen, Donelly, Dolciani. *Geometría moderna "Estructura y Método"* Publicaciones Culturales. México D.F. 1982

Leithold Louis. *Calculo* Mexico: Oxford, 1999 Mx. 7ª edición.

Maza Gomez Carlos. *Matemáticas en la antigüedad*, Sevilla España 2002 www.personal.us.es/cmaza/portada.html.

Moreno L. *Ideas geométricas del currículo presentadas mediante el Cabri Geométre.* MEN. Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Serie Memorias. Enlace editores. 2002.

Moreno L. *Instrumentos Matemáticos computacionales.* MEN. Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Serie Memorias. Enlace editores. 2002.

Moreno L (2002).*Cognición y computación; el caso de la geometría y la visualización*. MEN Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Serie Memorias. Enlace editores. 2002.

M.E.N. *Lineamientos curriculares "Matemáticas"* ed. Magisterio, Colombia 1998.

M.E.N. Lineamientos curriculares "Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas" ed. Magisterio Bogotá D.C. 1998

Moise Edwin E., Floyd L. Downs, Jr. Adisson-Wesley. Geometría moderna, Iberoamericana. USA, 1986.

Peña Miguel. Historia de la geometría Euclidiana, Los orígenes de la geometría, Revista Candidus Año 1 No. 10 junio/julio 2000.

Samper Carmen, Camargo Leonor, Leguizamón Cecilia. Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría, ASOCOLME 2003

Soler Martí Miquel. *Didáctica multisensorial de las ciencias* Paidos Barcelona 1999

The future of secundary School Geometry, La leerte de la preuve, Nov-Dic 1999

Traslaciones, rotaciones y reflexiones, Raht Geo Alg 07-2000 www.campus-virtual.uprrp.edu/campus-virtual2/cursos/Geovectplana/PDFS/Avgo7.pdf

Plano cartesiano algebra5tintas www.edilatex.com/index-archivos/algebra5tintas.pdf.

Viedma C. Juan A. *Lecciones de geometría intuitiva*, Ed. Norma 2000