CABRI GEOMETRE Y MODELO DE VAN HIELE EN LA EVOLUCION DEL PENSAMIENTO GEOMETRICO

(1) Maria Cristina Beltrametti – (2) Mónica Liliana Esquivel – (3) Elvira Eva Ferrari

(1) macribell@arnet.com.ar – (2) mesquive@gigared.com.ar – (3) elviraeferrari@yahoo.com.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. UNNE. ARGENTINA

RESUMEN

Este reporte de investigación se enmarca en el Proyecto "Teoría de Van Hiele y Cabri Géomètre en la construcción del concepto de transformaciones rígidas del plano". En el se pretende determinar los niveles del pensamiento geométrico de los alumnos del Profesorado en Matemática que cursan la asignatura Geometría Métrica y Trigonometría en la Facultad de Ciencia Exactas y Naturales y Agrimensura de la UNNE, en el estudio del tema Transformaciones Rígidas del Plano y compararlos con los de quienes emplean en el aprendizaje del tema el Soft Cabri Géomètre, siguiendo una secuencia que responde a lo establecido en el modelo de Van Hiele, a efectos de verificar o rechazar la hipótesis de que el empleo del Soft facilita en una situación de enseñanza-aprendizaje avanzar del nivel de deducción informal a niveles superiores de razonamiento.

INTRODUCCIÓN

Después de las reformas curriculares realizadas en las últimas décadas del siglo pasado se ha evidenciado en todos los niveles educativos un renovado interés por la enseñanza de la Geometría buscando recuperar el espacio y sentido que ha ido perdiendo en la escuela. Numerosas publicaciones en revistas especializadas y ponencias en congresos dan cuenta de ese interés.

Buscando mejorar el aprendizaje de sus estudiantes, en los años cincuenta el matrimonio integrado por Pierre y Dina Van Hiele quienes se desempeñaban como profesores en Holanda, proponen un modelo que es a la vez descriptivo, en cuanto intenta proporcionar información acerca de la evolución del razonamiento geométrico de los alumnos, y por otro, prescriptivo porque proporciona herramientas para que los docentes puedan facilitar a los estudiantes pasar de un nivel a otro nivel superior de razonamiento. Pierre Van Hiele fue el diseñador teórico del modelo y su esposa Dina Van Hiele desarrolló una aplicación práctica del modelo en geometría. (Jaime, A. 1995).

Adela Jaime(1995) destaca las siguientes características del modelo a las que considera importantes para la comprensión del mismo: *Secuencialidad en la adquisición de los niveles* que significa que no es posible alterar el orden de adquisición de los niveles de razonamiento; *Especificidad del lenguaje*: cada nivel tiene un lenguaje propio que no es posible desconocerlo tanto por parte de los docentes como de los alumnos pues provocaría incomprensión porque cada uno le daría su propia interpretación; *Paso de un nivel al siguiente*: el paso de un nivel , según los Van Hiele se da bruscamente, es decir una persona comienza razonando según las características de un nivel y llega un momento en que ve la geometría de otra manera. Sin embargo las investigaciones han mostrado que no sucede así, sino que hay momentos en los aparecen razonamientos de dos tipos de niveles distintos; *Globalidad o localidad*: esta característica supondría que todos los individuos tienen el mismo nivel de razonamiento en todos los conceptos de geometría pero las investigaciones indican que es posible que se posea distintos niveles en distintos conceptos; *Instrucción:* la adquisición de los sucesivos niveles no es una cuestión biológica, no depende de la edad de los individuos, depende de la instrucción recibida y de la experiencia personal.

Si bien la filosofía del Modelo se refiere al razonamiento en general, los trabajos de investigación que emplean el Modelo de Van Hiele están centrados en la Geometría, destacándose muy especialmente los realizados por Ángel Gutiérrez y Adela Jaime Pastor, aunque existen trabajos en otras áreas como la Física y el Cálculo diferencial entre los que es posible mencionar : "La noción de continuidad desde la óptica de los Niveles de Van Hiele de Pedro Campillo Herrero y Pedro Pérez Carrera, " An extensión of Van Hiele's models to the study of local aproximation" de José Luís Llorens, entre otros. Mayberry (1983) ha realizado estudios relativos a la naturaleza jerárquica de los niveles de Van Hiele y la asignación de niveles a los estudiantes, Usiskin (1982) ha medido las habilidades geométricas de estudiantes como una función del nivel de Van Hiele y Fuys, Geddes y Tischhler(1985) han estudiando los efectos d e la instrucción en un nivel de Van Hiele predominante en los estudiantes.

Otro aspecto que se ha tenido en cuenta en este trabajo es la incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática y de la geometría en particular. Numerosas publicaciones y trabajos tales como los López Salmerón (2006); Willers(1999), Uicab Ballote , Oktac (2006), ponen de manifiesto que el empleo de la informática en educación influye satisfactoria y significativamente en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El Soft Cabri-Géomètre permite a los estudiantes experimentar temas geométricos de la misma manera que se experimentan temas aritméticos con las calculadoras e inducir descubrimientos siguiendo el proceso: Diseñar $\rightarrow$ Explorar $\rightarrow$ Modelizar $\rightarrow$ Conjeturar $\rightarrow$ Definir $\rightarrow$ Argumentar $\rightarrow$ Demostrar. (Alsina, 1997), actividades propias del quehacer matemático.

El contenido matemático seleccionado es trasformaciones rígidas, elegido en virtud de que las isometrías se pueden emplear como elemento unificador (concepto de grupo) tal como lo presentó Félix Klein (1872) quien encuentra en el concepto de grupo una idea unificadora, y lo desarrolla en Geometría. Así, la geometría euclídea plana, consiste en el estudio de las figuras del plano, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones que se genera por las traslaciones y rotaciones en el plano, llamadas transformaciones rígidas o movimientos. (Boyer C, 1996).

MARCO TEÓRICO

NIVELES RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

Para la determinación de la evolución de los niveles del pensamiento geométrico en los alumnos del Profesorado en Matemática que cursan la asignatura Geometría Métrica y Trigonometría se emplea la Teoría de Niveles del Pensamiento Geométrico de Van Hiele (Modelo de Van Hiele) y el Soft Cabri Géomètre.

El modelo de Van Hiele explica como se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y el modo de ayudarlos a pasar de un nivel a otro de razonamiento. Según este modelo el aprendizaje es comparado a un proceso inductivo (Alsina; 1997); así en un nivel *n -1* pueden ser estudiadas ciertas cuestiones limitadas de los objetos geométricos. En el nivel n se suponen conocidos los conocimientos del nivel n-1 y se explicitan las relaciones que estaban implícitas en el nivel anterior, aumentando así el grado de comprensión del conocimiento. Así los objetos de nivel n son extensiones del nivel n-1.

El modelo de Van Hiele está estructurado en niveles y fases y describe las diferentes formas de razonamiento que es posible encontrar en los individuos sin diferencia de edades.

En geometría se caracterizan de la siguiente manera: (Alsina, 1997), (Gutiérrez; 1996)

Nivel 0: Los individuos perciben las figuras como un todo global, no reconocen las partes y componentes de las figuras, no explicitan las propiedades determinantes de las figuras, pueden sin embargo producir una copia de cada figura particular o reconocerla, Los argumentos o razonamientos de los estudiantes se basan en descripciones o exhibiciones de características físicas de las figuras u objetos.

Nivel 1: Los individuos pueden analizar las partes y propiedades particulares de las figuras, pero no pueden explicitar relaciones entre distintas familias de figuras, las propiedades de las figuras se establecen experimentalmente; es el inicio del razonamiento matemático. Las demostraciones son de tipo empírico, se trata de la comprobación de que la conjetura se verifica en un limitado número de ejemplos.

Nivel 2: Los individuos determinan las figuras por sus propiedades matemáticas aunque no sean capaces de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen sus observaciones. Es el inicio del razonamiento matemático lógico deductivo aunque de carácter informal. En este nivel los estudiantes aprenden a distinguir hipótesis y tesis y entienden el concepto de dependencia lógica aunque se apoyan todavía en la manipulación y en ejemplos concretos, no se reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos. En este nivel, los estudiantes no pueden escribir demostraciones formales ni usar la escritura y simbología matemática formal

Nivel 3: En este nivel los estudiantes ya comprenden las ventajas del razonamiento deductivo formal, la estructura de un sistema axiomático (axiomas, definiciones y teoremas) y pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra. En este nivel los estudiantes son capaces de realizar razonamientos totalmente abstractos, desvinculados de cualquier elemento concreto sustentados únicamente en la manipulación de propiedades y teoremas aceptados o demostrados con anterioridad y escribir demostraciones formales.

Nivel 4: En este niveles el de máximo rigor y abstracción en el razonamiento matemático. Los individuos están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos, pueden apreciar la consistencia, la independencia y la completitud de los sistemas de axiomáticos de la geometría. Este nivel por su alto grado de abstracción debe ser considerado en una categoría aparte, tal como sugieren los últimos estudios sobre el tema. (Alsina, Fortuny y Pérez Gómez, 1997).

Van Hiele propuso cinco fases de enseñanza que guían al docente en el diseño de experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su aprendizaje de la Geometría. Fase1: *Discernimiento,* en esta fase se presenta a los estudiantes situaciones de trabajo dando el vocabulario y las observaciones necesarias para el su desarrollo. Fase 2: *Orientación dirigida,* en esta fase se propone a los estudiantes una secuencia de actividades graduadas a realizar y explorar; la ejecución y la reflexión propuesta servirán de motor para propiciar el avance en los niveles de conocimiento. Fase 3: *Explicitación* los estudiantes, una vez realizadas las experiencias, expresan sus resultados y comentarios; durante esta fase el estudiante estructura el sistema de relaciones exploradas. Fase 4: *Orientación libre; c*on los conocimientos adquiridos, los estudiantes aplican sus conocimientos de forma significativa a otras situaciones distintas de las presentadas, pero con una estructura comparable. Fase 5: *Integración.,* los objetos y las relaciones son unificados e interiorizados en su sistema mental de conocimientos. Superada la Fase 5, se alcanza un nuevo nivel. (Alsina, 1997).

Las ideas que guiaron a Van Hiele para la caracterización de su modelo y que se emplean actualmente son las siguientes: a) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemática; b) Un estudiante sólo pondrá comprender realmente aquella parte de la matemática que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento; c) Si una relación matemática no puede expresarse en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario que ellos alcancen un nivel de razonamiento superior para ser presentada. d) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada manera pero si se les puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma. (Jaime A, Gutiérrez, A., 1990)

EL SOFTWARE CABRI GÉOMÈTRE

El software es un programa computacional desarrollado por Ives Baulac, Franck Bellemain y Jean-Marie Laborde del laboratorio de estructuras discretas y de didáctica LSD2 del Instituto de Informática y Matemáticas Aplicadas de Grenoble (IMAG) Francia, de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble con el apoyo del Centro Nacional de Investigación Científica (CNRS) de Francia, que ayuda a comprender como se trabaja en geometría, a estudiar las propiedades de las figuras, a visualizar los objetos geométricos creados, moverlos y analizar y observar las propiedades que se conservan e identificar sus invariantes, regido por las reglas de la geometría euclidiana. Estas características hacen que la visualización estática de una construcción sea modificada por una construcción dinámica, redundando en una mejor comprensión de los conceptos que se desean aprender.

Los menús de la barra de herramientas del soft permiten realizar diferentes acciones, en particular del menú Transformar la opción Simetría Axial: construye la imagen de un objeto respecto de una recta (eje); Rotación: construye la imagen de un objeto que gira alrededor de un punto según un determinado ángulo orientado; Simetría Central: construye la imagen simétrica de un objeto respecto a un punto. Traslación**:** construye la imagen de un objeto que se traslada según un vector. Reflexión deslizante: construye la imagen especular y trasladada de un objeto respecto de un eje y un vector paralelo al mismo.

MÉTODO

Para el análisis de la evolución de los niveles de pensamiento geométrico de los estudiantes del Profesorado en Matemática que cursaron la asignatura Geometría Métrica y Trigonometría en los años 2003, 2004 y 2005 respectivamente se realizaron diferentes actividades.

Se inició con la realización de una exhaustiva revisión bibliografía de las investigaciones que tratan de idéntica problemática de las transformaciones rígidas, del Modelo de Van Hiele y del uso de ordenadores y programas de geometría dinámica para la enseñanza de la geometría.

Se organizó y dictó un curso de Cabri destinado a los estudiantes que cursan la asignatura para que conozcan el Soft y su uso.

Se implementaron dos test (test inicial y final), diseñados siguiendo las propuestas que presentan Jaime Pastor y Gutiérrez Rodríguez (1996), de manera que las respuestas de los alumnos pudieran ser evaluadas desde la teoría de niveles de Van Hiele y siguiendo la caracterización propuesta por Alsina, Fortuny y Pérez Gómez (1997).

El test inicial se aplicó luego de proporcionar conceptos teóricos sobre el tema y consistió en la realización de actividades características de los Niveles: 0, 1, 2, y 3 considerando las diferentes fases (Discernimiento, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación Libre, Integración) siguiendo la propuesta para el tema Transformaciones Rígidas brindada por Alsina, Fortuny y Pérez Gómez, (1997) que se transcribe a continuación en el siguiente cuadro.

Niveles Fases	0.Figura	1.Propiedad	2.Relación	3.Demostra-ción	4. Sistema
1.Discerni-miento	Comparar las acciones de deslizar, girar, y saltar con los movimientos de traslación, de rotación y de reflexión.	Comparar por ejemplo la idea de mediatriz con la de eje de simetría	Relacionar las acciones de girar y trasladar con las de doblar.	Relacionar el cambio de posición de una figura con su superposición mediante pliegues sucesivos.	Relacionar la regularidad con la importancia
2.Orientación dirigida	Trasladar, girar y simetrizar una figura.	Encontrar las propiedades comunes de los puntos que se obtienen al transformar un punto dado.	Efectuar diferentes composiciones de reflexiones	Efectuar composiciones de tres reflexiones	Identificar todas las transformaciones que dejan invariante una figura.
4Orientación libre	Resolver un problema por el método de las transformaciones geométricas.	Descubrir los elementos constituyentes de una figura que se conserven al efectuar transformacio- nes geométricas.	) Dado un giro o una traslación encontrar los ejes de reflexión que los descompone.	adas 2 posiciones de una figura, encontrar la composición de reflexiones que transforma una posición en otra. .	Encontrar la figura dado su grupo de simetría.

5.5 Interrogación	Definiciones elementos básicos de las transformaciones geométricas.	Enunciar la noción general de propiedades invariantes.	Estudio de la composición general de 2 reflexiones	Estudio de la generación de cualquier isometría como producto general de 2 reflexiones	Clasificación y teoría de grupos.

El segundo test (Test final) se aplicó luego de haber trabajado el tema en las clases prácticas en las cuales se presentaron situaciones de aprendizaje que incluyeron las fases para cada uno de los niveles 0, 1,2 y 3. En esta oportunidad, el grupo de estudiantes se dividió al azar en dos grupos de igual número de integrantes. Uno de ellos realizó sus tareas en forma tradicional, mientras que el otro lo realizó empleando el soft.

Tanto en el test inicial como en el final se presentaron problemas en los que se enfatizó la necesidad de que los alumnos explicaran o demostraran las conjeturas que realizaban. Cada problema era posible resolverse usando distintos niveles de razonamiento a efectos de desarrollar las diferentes capacidades que habitualmente encontramos entre los estudiantes de una clase.

Para la asignación de niveles de razonamiento de los alumnos se tuvieron en cuenta tanto el tipo de respuesta a una situación planteada como el grado de adquisición de un nivel de razonamiento. El proceso de evaluación del nivel del razonamiento se inició asignando el nivel según el tipo de respuesta que dio cada estudiante a las cuestiones que conformaron el test escrito. Se tuvo especialmente en cuenta que “Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de Van Hiele no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a un determinado vocabulario” (Jaime y Gutiérrez, 1990) y que “para determinar el nivel de razonamiento lo más importante no es evaluar si los estudiantes contestan bien o mal, sino cómo contestan y por qué lo hacen así” (Jaime y Gutiérrez, 1990). Para establecer las diferencias entre ambos grupos de estudiantes se utilizó el test χ^2 de homogeneidad en tabla de contingencia al nivel de significación del 5%.

RESULTADOS OBTENIDOS

Se presentan a continuación los resultados obtenidos luego de realizar la experiencia con tres diferentes grupos de estudiantes del Profesorado en Matemática durante los años 2003, 2004 y 2005.

La siguiente Tabla I resume el número de alumnos y porcentajes por nivel alcanzado en el Test Inicial y Test-Final durante los años 2003,2004 y 2005 respectivamente.

Niveles de razonamiento de los estudiantes alcanzados por los diferentes grupos de estudiantes luego de la aplicaciones de los tests inicial y final

Año	N°Alumnos	Nivel 0		Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
		Test Inicial	Test Final	Test Inicial	Test Final	Test Inicial	Test Final	Test Inicial	Test Final	Test Inicial	Test Final
2003	26	3 12%	**0 0%**	8 (31%)	**1 4%**	15 57%	**20 77%**	0 0%	**5 19%**	0 0%	0 0%
2004	15	0 0%	**0 0%**	9 60%	**2 13%**	6 40%	**10 67%**	0 0%	**3 20%**	0 0%	0 0%
2005	19	0 0%	**0 0%**	3 16%	**0 0%**	15 79%	**9 47%**	1 5%	**10 53%**	0 0%	0 0%

Tabla I

Los estudiantes que han alcanzado el Nivel 0 fueron capaces de identificar una transformación rígida, aplicar una transformación rígida a una figura, e identificar y definir los elementos básicos de una transformación. Alcanzaron el Nivel 1 los alumnos que encontraron las propiedades de las imágenes de puntos del plano por medio de una transformación rígida, descubrieron y enunciaron las propiedades que permanecen invariantes en una transformación rígida. Quienes alcanzaron el Nivel 2 fueron capaces de efectuar diferentes composiciones de transformaciones, explicitar todas las posibilidades de componer dos reflexiones, descomponer un movimiento y caracterizar en forma general la composición de dos reflexiones. El Nivel 3 es alcanzado por quienes son capaces de relacionar el cambio de posición de una figura con un movimiento, efectuar composición de tres reflexiones, explicitar todas las posibilidades de componer tres reflexiones, dados dos posiciones de una figura encontrar la composición de de reflexiones que transforman una posición en otra, estudio de la generación de cualquier isometría como producto de reflexiones.

La Tabla II resume la variación de niveles de los estudiantes (en números y porcentajes) y la variación de los niveles comparando entre quienes emplearon el Soft Cabri y quines no lo hicieron (en números y porcentajes).

Tabla II Variación de los niveles de razonamiento de los diferentes grupos de estudiantes

Año	N°Alumnos	Mantuvieron el nivel	Subieron el nivel	Mantuvieron nivel con Cabri	Mantuvieron nivel sin Cabri	Subieron nivel con Cabri	Subieron nivel sin Cabri	χ^2
2003	26	11 42%	**15** **58%**	**5** **38.5%**	8 61.5%	**8** **61.5%**	5 38.5%	0.615 gl=1 P=0.433
2004	15	6 40%	**9** **60%**	**2** **29%**	4 50%	**5** **71%**	4 50%	0.714 gl=1 0.398
2005	19	8 42%	**11** **58%**	**4** **37%**	4 50%	**7** **63%**	4 50%	0.35 gl=1 P=0.55

Tabla II

CONCLUSIONES

Los resultados que refleja la Tabla I, indican que la mayoría de los estudiantes ha adquirido niveles superiores de razonamiento al que poseía al inicio del curso; sin embargo consideramos insuficiente el número de alumnos que alcanzan el Nivel 3 (Demostración), lo que es deseable para los estudiantes de un curso universitario de Geometría. Resulta bastante homogénea la distribución de alumnos por niveles alcanzados, especialmente en los dos primeros años en que se ha realizado la experiencia.

En todos los años es mayor el número de estudiantes que ha pasado solamente a un nivel superior de razonamiento, y en algunos casos puntuales han superado dos niveles de razonamiento; es significativo el número de estudiantes que se mantiene en el nivel de razonamiento inicial.

Del grupo de estudiantes que empleó el soft Cabri Géomètre en sus prácticas, tal como lo refleja la Tabla II, la mayoría pasó a un nivel superior de razonamiento, obteniendo mejor rendimiento, lo que validaría nuestra hipótesis de trabajo, sin embargo no se encontraron diferencias significativas en el rendimiento de los dos grupos de alumnos, mediante el estadístico χ^2 debido al tamaño reducido de la muestra.

El trabajar con el Soft Cabri despertó en los estudiantes, tanto la curiosidad e interés por la geometría como por la herramienta misma, sus posibilidades y limitaciones y permitió alcanzar uno de los objetivos propuestos que era el conocimiento por parte de los futuros docentes de una tecnología educativa y de la posibilidad de acceder a prácticas pedagógicas diferentes. A los efectos de evaluar el impacto del empleo del soft en el aprendizaje del tema se interrogó a los alumnos mediante una encuesta sobre los aspectos que consideran que esta herramienta contribuye a facilitar su aprendizaje. La mayoría de los estudiantes coincidieron en que el empleo del soft facilita la visualización, la construcción, la realización de composiciones de simetrías y la descomposición de movimientos, pero no lo destacan como facilitador del proceso de demostración.

Durante el desarrollo de la investigación se han presentado limitaciones tales como: las características del grupo: el tamaño de la muestra: es pequeño; la selección de las actividades: encontrar actividades significativas de cada una de las fases correspondientes a cada nivel como así también la determinación de los criterios de éxito ha sido muy difícil, y si bien se ha seguido bibliografía específica no podemos dejar de lado factores subjetivos que influyen en la determinación de los diferentes niveles coincidiendo con Mayberry (1983) especialmente en los momentos en los aparecen razonamientos de dos tipos de niveles distintos; el tiempo asignado a la práctica con ordenadores no ha sido el deseado debido a la organización curricular como así también el tiempo que los estudiantes destinan al cumplimiento de las tareas obligatorias (clases prácticas) y no obligatorias (clases teóricas).

A pesar de las limitaciones mencionadas, se considera que esta investigación tiene implicaciones prácticas tanto para los estudiantes como para los docentes. El conocimiento por parte de los docentes de los niveles de razonamiento alcanzados por sus alumnos les permitirá crear situaciones de aprendizaje que les faciliten avanzar en su nivel de razonamiento y evitar fracasos que surgen de proponer actividades que no están en condiciones de realizar

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C.; Fortuny, J.M.; Pérez, R*:* (1997). *¿Por qué geometría? Colección* "Educación matemática en Secundaria" Nº 5. Madrid, España. Editorial Síntesis.

Beltrametti M. Esquivel M, Ferrari E. (2004) Determinación de los niveles de pensamiento geométrico según la Teoría de Van Hiele en estudiantes de Profesorado de Matemática al inicio de un curso de Geometría Métrica Comunicaciones Científicas y Tecnológicas 2004. Universidad Nacional del Nordeste. Resistencia. Chaco.

Beltrametti M. Esquivel M, Ferrari E. (2005) Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes del Profesorado de Matemática. Comunicaciones Científicas Tecnológicas 2005. Corrientes.

Beltrametti M. Esquivel M, Ferrari E. (2006) *Pensamiento geométrico de los estudiantes de Profesorado de Matemática.* Comunicaciones Científicas y Tecnológicas 2006.Resistencia. Chaco.

Beltrametti, M. (2005) *El modelo de Van Hiele y los niveles de razonamiento en estudiantes de la UNNE* en Revista del Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Nordeste. Año 1. N° 2. Pp.32-37.

Burger, W. F; Shaughnessy, J: M (1986) *Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry*. Journal for Research in Mathematics Education. Vol.17.Nº1. PP31-48. Traducido por María Luisa Luna de la Universidad de Cádiz, revisada por Ángel Gutiérrez Universidad de Valencia.

Boyer C. (1996) *Historia de la Matemática*. Alianza Universidad. Textos. Madrid.

Campillo Herrero, P.; Pérez Carreras P.: (1998) "*La noción de continuidad desde la óptica de los Niveles de Van Hiele*" .Divulgaciones Matemáticas Vol.6. N°1.Pp.69-80.

Jaime, A. (1995) ¿*Porque los estudiantes no comprenden la geometría*? En Gutiérrez, A, Jaime A. Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica .México.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990) *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele*, en Teoría y Práctica en Educación Matemática. Ediciones Alfar. Sevilla.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996) *El grupo de las isometrías del plano* .Colección "Educación matemática en Secundaria" Nº 13). Editorial Síntesis: Madrid, España).

Llorens, J.L; Pérez Carrera P. (1997)“ An extensión of Van Hiele's models to the study of local aproximation” . Jour. Math. Edu. in Ciencia and Technol. Vol.28 N°5. Pp..713-726.

Mayberry Joanne (1983) “*Los niveles de pensamiento geométrico en estudiantes para profesor*” Jornal for Research in Mathematics Educación Vol.14.N°.1 Pp. 58-69. Traducción de Ricardo Barroso Campos. Universidad de Sevilla.

Uicab, R. Oktaç A. (2006) *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, noviembre Vol.9 Número 003. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal de México .pp.459-490