

## PREDICCIÓN DE ECLIPSES CON GEOMETRÍA BÁSICA: UTILIZACIÓN DE CABRI GÉOMÈTRE COMO HERRAMIENTA DE MODELACIÓN

Gabriel Conde Arango

[gconde@pino.univalle.edu.co](mailto:gconde@pino.univalle.edu.co)

Universidad del Valle. COLOMBIA

### RESUMEN

*Utilizando conceptos geométricos básicos conjuntamente con ideas matemáticas muy sencillas (como por ejemplo las relaciones congruenciales), adicionalmente con conocimientos de astronomía de posición y de eclipses y teniendo a mano una herramienta de geométrica dinámica como Cabri se quiere presentar un modelo que es capaz de predecir el día en que se presentarán los eclipses en un próximo futuro con una precisión de uno a dos días. Se pretende que el modelo tenga carácter discreto o casi-continuo, dependiendo de las escogencia de los parámetros de entrada que el usuario defina. La idea de esta construcción surge a partir de un trabajo anterior, presentado en Ibero Cabri 2006, en la que la base del modelo es una disposición circular discreta de 56 marcas en representación de la eclíptica y el movimiento de tres indicadores (Sol, Luna y Nodos Lunares) “saltando discretamente” con diferentes tasas de movimiento. Se considera la ocurrencia de un eclipse cuando las tres marcas coincidan alrededor de una de las marcas. Tales ideas son desarrolladas a partir de una propuesta hecha por el astrónomo inglés Fred Holey en su libro “De Stonehenge a la cosmología contemporánea”. Después de esto se ha construido un modelo que involucra la posibilidad de movimientos o “saltos” más pequeños y llegar así a modelar sobre un escenario casi continuo. Una vez especificadas las limitaciones del modelo, este se pondrá a prueba comparando sus resultados con eclipses ya acaecidos o con futuros eclipses establecidos en páginas o enlaces de reconocida confianza académica.*

### EXPLICACIONES GENERALES

El objeto de esta propuesta es presentar lo que podría denominarse una segunda parte de la conferencia presentada en Iberocabri 2006 (Bogotá) titulada “Una Dinámica Práctica para la Predicción de Eclipses”. A continuación se presentan algunas líneas recogidas de la propuesta anterior, explicando el objetivo que se tenía hace dos años:

“La idea que se quiere desarrollar parte de un mecanismo dinámico circular compuesto por 56 marcas que servirá para hacer un seguimiento de las posiciones de tres elementos fundamentales y básicos que entran en juego en un eclipse, a saber: el

Sol, la Luna y los Nodos, todos ellos moviéndose sobre tales marcas dispuestas en un círculo (este círculo es una representación de la eclíptica). Se utilizarán herramientas computacionales que son de gran ayuda para comprender, no solamente el mecanismo propuesto, sino también para entender los fundamentos esenciales en el fenómeno de los eclipses. Además la máquina computacional nos permitirá un adecuado “manejo” del trámite de los diferentes movimientos que debemos controlar.

La idea original la expone Fred Hoyle (Astrónomo inglés) en un estudio [ver F. Hoyle “De Stonehenge a la cosmología contemporánea”. Alianza Editorial. Madrid 1982] en el cual plantea la posibilidad de que algunas configuraciones geométricas en Stonehenge (monumento prehistórico situado cerca de la ciudad de Londres), podrían ser utilizadas para predecir eclipses. La idea es muy original y especulativa y requiere de un mecanismo dinámico circular, tal como el que se construye en esta propuesta (en Stonehenge está presente lo que se puede considerar como este mecanismo). De otro lado, la utilización de Cabri Géomètre nos presta una gran ayuda para comprender, no solamente la idea de F. Hoyle, sino como ya se dijo, para entender los elementos de los eclipses, sus relaciones y configuraciones. Se propone entonces el empleo de un programa en Cabri para simular y predecir eclipses trabajando con la aproximación que proveen las observaciones hechas con un sistema de piedras separadas por distancias en un orden de magnitud de 100 metros”.

Este resumen hace referencia a la construcción de un modelo en el que se representan objetos astronómicos, el Sol, la Luna y los Nodos con movimientos discretos sobre la eclíptica (camino del sol sobre la esfera celeste) representada por 56 marcas colocadas equidistantes formando un arreglo circular. Los tres elementos, Sol, Luna, Nodos se mueven sobre el círculo, de marca en marca, con tasas que se definen de acuerdo a sus movimientos sobre la esfera celeste. Para ilustrar esta parte se inserta una imagen del mecanismo circular con 56 marcas y algunos otros detalles, construido en Cabri.

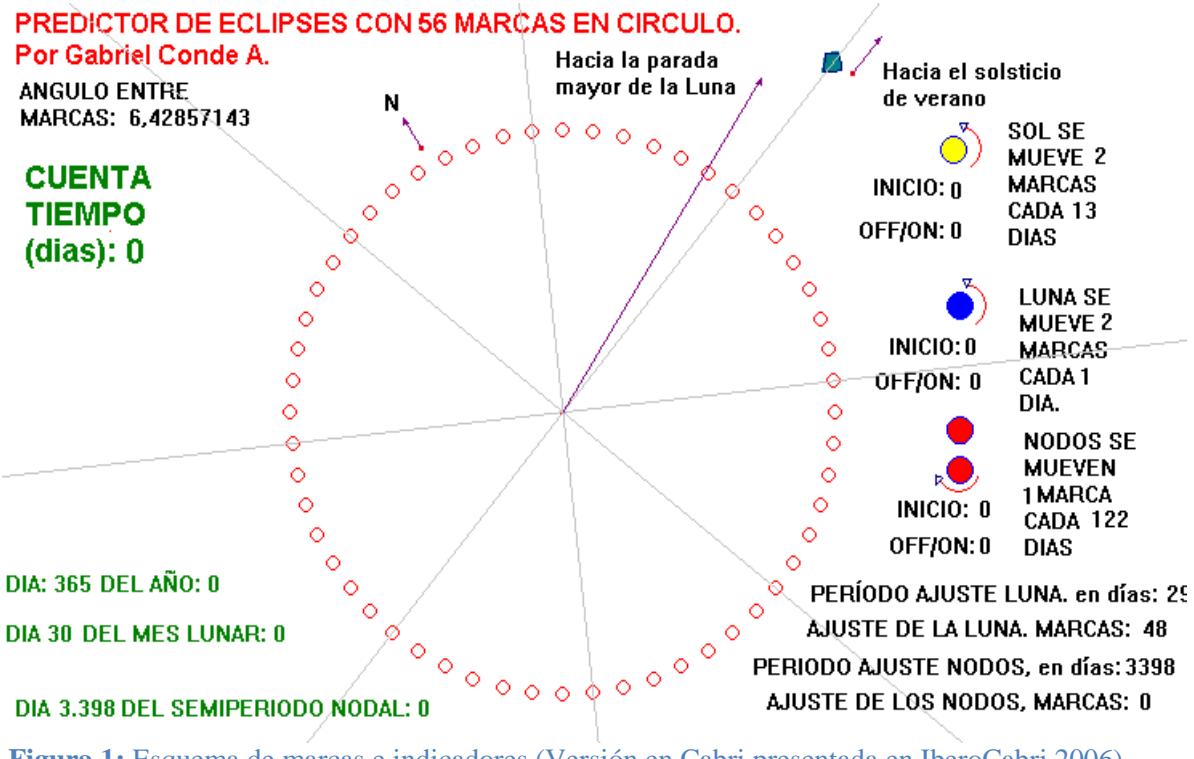


Figura 1: Esquema de marcas e indicadores (Versión en Cabri presentada en IberoCabri 2006)

Una segunda parte es la que se propone para Cabri 2008 y surge con la idea de pasar de lo “discreto” a lo “continuo” (Esto podría verse como una extensión). Como se aprecia, la primera parte tiene un carácter discreto, aparece entonces la inquietud acerca de la posibilidad de extender el mecanismo (que en adelante llamaré “modelo”) a una versión “casi continua” utilizando los mismos principios e instrucciones que se usaron en el caso del mecanismo de los 56 marcas (es decir, con la misma estructura computacional en Cabri).

Desde el punto de vista de la construcción geométrica la herramienta es muy sencilla por lo que en Cabri necesitamos solo aquellas instrucciones que tienen que ver con círculos, ángulos y sus medidas, rotaciones y distancias. Desde el punto de vista de la programación de su funcionamiento el modelo es más complejo, para esto necesitamos el manejo adecuado de la calculadora integrada en Cabri con fines de aplicar la teoría matemática de las congruencias de Gauss (Ver Tellechea 1998 ó Knuth 1973) y las funciones de la calculadora asociadas a esta teoría (como la función “floor”). Posiblemente, este último aspecto, es parte importante (por no decir la principal) de esta aplicación.

Después de hacer consideraciones de precisión y de reducción de incrementos en las medidas temporales y distancias el modelo se extendió a movimientos bien sea discretos o casi continuos considerando condiciones iniciales variables a través de parámetros de entrada solicitados (por ejemplo: las unidades de tiempo, las tasas o razones de cambio, tiempos de ingreso de los indicadores). A manera de ilustración en la figura 02 se presenta un pantallazo tomado de la aplicación construida en Cabri.

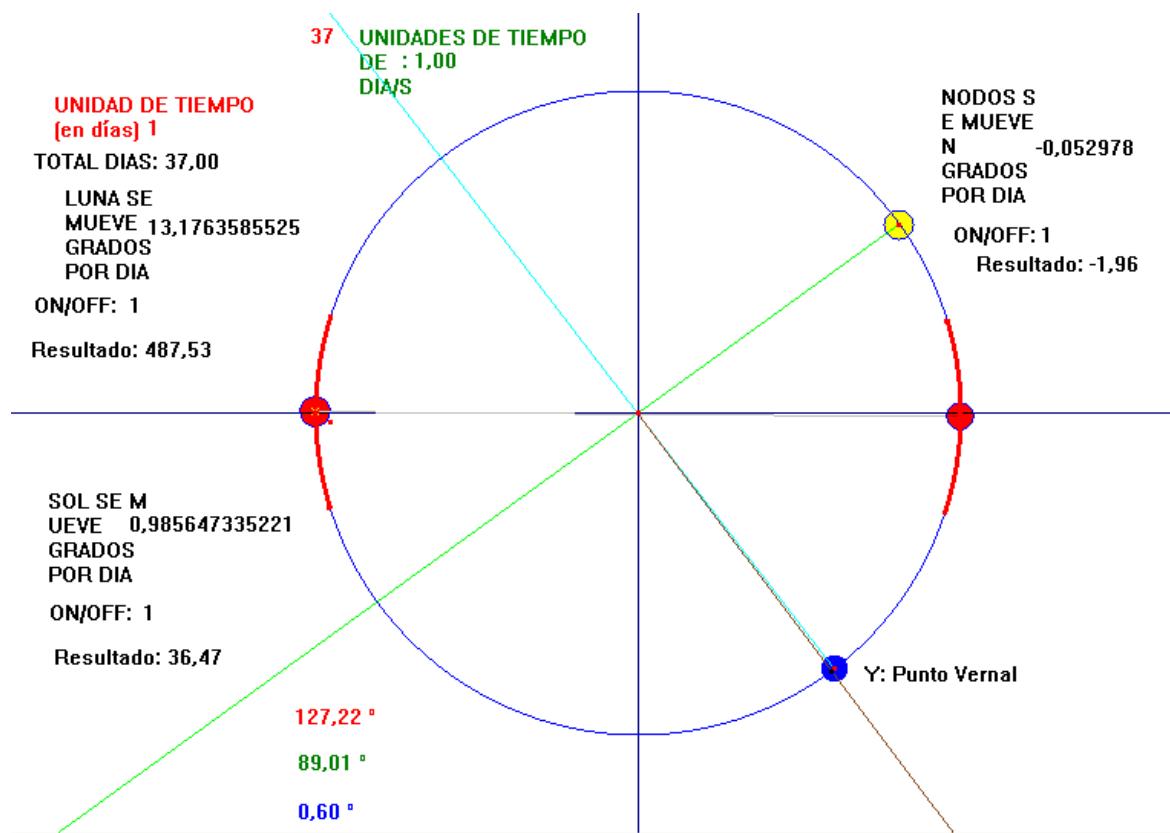


Figura 2: Ilustración del modelo “casi continuo” con diferentes valores de entradas

Como se mostrará en la conferencia es necesario hacer “saltar” o “rotar de manera casi continua” los tres indicadores (representan el sol, la luna y los nodos) simultáneamente, dispuestos sobre un círculo continuo, a tasas diferentes con respecto a una unidad de tiempo (que se ha llamado “tic” y que bien pueden ser día). Se entenderá como un eclipse la coincidencia de estos tres indicadores sobre el círculo (representa la eclíptica)

Se presentan a continuación las generalidades de las instrucciones usadas en el modelo que se utiliza en asocio con las funciones de la calculadora Cabri.

Ayuda de la programacion en cabri del estudio de las coincidencias de tres objetos (marcadores amarillo, azul y rojo) girando, a diferentes tasas, sobre M marcas dispuestas sobre una circunferencia.

NOTA: Estas instrucciones se presentan en un contexto general, los indicadores amarillo, azul y rojo representan indicadores cualquiera (podrán eventualmente representar objetos astronómicos). En la construcción del modelo algunas de tales generalidades son reducidas a parámetros de entrada y otras fueron fijadas de acuerdo a necesidades de las medidas de distancia, tiempo y ángulos de acuerdo a las características astronómicas de la Tierra conjuntamente con las del Sol (Indicador amarillo), la Luna (indicador azul) y los Nodos Lunares (Indicadores rojos). Ver figura 02

## INFORMACION INICIAL

Tenemos M marcas dispuestas circularmente. Lo cual implica que el ángulo (en grados) entre ellas:

$$A = 360^\circ/M$$

Contador de tiempo: CUENTA TIEMPO: T = 1, 2, .... (Unidad de tiempo = Tic)

Tres marcadores = círculos de color AMARILLO, AZUL y ROJO

AMARILLO: Se mueve a razón de S marcas cada SC tic's, en sentido positivo  $\circlearrowright$ .

INICIO AMARILLO = IS = tic en que se coloca el marcador amarillo.

AMARILLO\_OFF/ON = Prende/apaga el movimiento del marcador amarillo

AZUL: Se mueve a razón de L marcas cada LC cuentas, en sentido positivo  $\circlearrowright$ .

INICIO AZUL = IL = tic en que se coloca el marcador azul.

AZUL OFF/ON = Prende/apaga el movimiento del marcador azul.

ROJO: Se mueve a razón de N marcas cada NC cuentas, en sentido negativo ⌂

INICIO ROJO = IN. = tic en que se coloca el marcador rojo.

ROJO\_OFF/ON = Prende/apaga el movimiento del marcador rojo.

### MOVIMIENTOS:

#### PARA AMARILLO

CUENTA AMARILLO = T – IS = CS

Cuenta el número de tic's después que fue colocada la señal

AMARILLO(0,1) =  $\text{floor}((\text{CS})/\text{SC}) - \text{floor}((\text{T} - 1)/\text{SC})$ :

Asigna 0 cuando el cociente CS/SC no es exacto y 1 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

AMARILLO(1,2) = AMARILLO(0,1) + 1.

Asigna 1 cuando el cociente CS/SC no es exacto y 2 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

AMARILLO(1,0) = AMARILLO(1,2) – 2\*AMARILLO(1,0)

Asigna 1 cuando el cociente CS/SC no es exacto y 0 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

MUEVE AMARILLO =  $[\text{S} * \text{floor}(\text{CS}/\text{SC}) * \text{A} * (\text{AMARILLO}(1,0) + \text{AMARILLO}(0,1)] * \text{AMARILLO\_OFF/ON}$

#### PARA AZUL

CUENTA AZUL = T – IL = CL:

Cuenta el número de tic's después que fue colocada la señal

$AZUL(0,1) = \text{floor}((CL/LC) - \text{floor}((CL - 1)/LC))$ :

Asigna 0 cuando el cociente  $CL/LC$  no es exacto y 1 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

$AZUL(1,2) = AZUL(0,1) + 1$ .

Asigna 1 cuando el cociente  $CL/LC$  no es exacto y 2 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

$AZUL(1,0) = AZUL(1,2) - 2 * AZUL(1,0)$

Asigna 1 cuando el cociente  $CL/LC$  no es exacto y 0 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

$MUEVE \quad AZUL \quad = \quad [L * \text{floor}(CL/LC) * A * (AZUL(1,0) + AZUL(0,1)] * AZUL\_OFF/ON$

PARA ROJO:

$CUENTA\ ROJO = T - IN = CN$

Cuenta el número de tic's después que fue colocada la señal

$ROJO(0,1) = \text{floor}((CN/NC) - \text{floor}((CN - 1)/NC))$ :

Asigna 0 cuando el cociente  $CN/NC$  no es exacto y 1 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

$ROJO(1,2) = ROJO(0,1) + 1$ .

Asigna 1 cuando el cociente  $CN/NC$  no es exacto y 2 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

$ROJO(1,0) = ROJO(1,2) - 2 * ROJO(1,0)$

Asigna 1 cuando el cociente  $CN/NC$  no es exacto y 0 cuando este cociente si es exacto (residuo = 0)

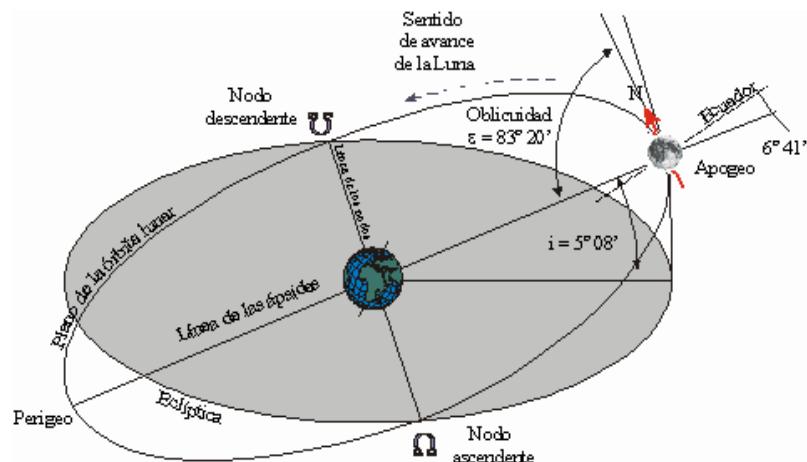
$$\begin{aligned} \text{MUEVE} & \quad \text{ROJO} & = & \quad [\text{N} * \text{floor}(\text{CN/NC}) * \text{A} * (\text{ROJO}(1,0)) & + \\ \text{ROJO}(0,1)] * \text{ROJO\_OFF/ON} & & & & \end{aligned}$$

## RESUMEN DE LOS ASPECTOS BASICOS ASTRONOMICOS NECESARIOS DE LOS ECLIPSES EN RELACION CON EL MODELO PRESENTADO

Nos proponemos el siguiente ejercicio: utilizar el modelo geométrico, bosquejado anteriormente, conjuntamente con las características astronómicas del Sol, la Luna y los Nodos Lunares para predecir eclipses con una precisión de uno o dos días.

**ECLIPSE:** Alineamiento Sol, Luna, Tierra (no necesariamente sus centros) [En un año puede haber hasta 5 eclipses de sol y 3 eclipses de luna]

**NODOS:** Punto o puntos donde se cruzan las órbitas de dos objetos astronómicos o planetas. Sobre la eclíptica consideramos los nodos lunares como los puntos de intersección de la órbita de la luna y la eclíptica.  $\Omega$  es el nodo ascendente y  $\Omega'$  el descendente



**Figura 3:** La eclíptica, la órbita lunar y los nodos. (Tomado de “Curso de Astronomía”. Mailxmail.com)

Solo hay eclipse si la luna se encuentra próxima a alguno de los nodos  $\Omega$  o  $\Omega'$ :

Supongamos que la luna se encuentra en  $\Omega$ , entonces: 1) si el Sol está a menos de  $15^\circ$  de  $\Omega$  habrá eclipse de sol y 2) si el Sol está a menos de  $10^\circ$  de  $\Omega'$  habrá eclipse de luna.

Supongamos ahora que la luna se encuentra en  $\Omega'$ , entonces la situación se invierte: 1) si el Sol está a menos de  $15^\circ$  de  $\Omega'$  habrá eclipse de sol y 2) si el Sol está a menos de  $10^\circ$  de  $\Omega$  habrá eclipse de luna

Para saber si hay eclipse debemos conocer:

La posición del Sol en su órbita en todo momento.

La posición de la Luna en todo momento (o su proyección sobre la eclíptica)

La posición de los nodos N y N' en la órbita solar.

¿Cómo hacer lo anterior en el modelo propuesto ?

Respuesta/ Para ello nos ubicamos como observadores terrestres y usamos el círculo como una representación de la eclíptica. A continuación hacemos las siguientes consideraciones:

Para el Sol: El Sol da una vuelta en 365.25 días o sea:  $\frac{360}{365.25} = 0.98564733^\circ \times$  día.

Ajustamos entonces los parámetros del modelo de acuerdo a esta tasa o si se quiere con fracciones de día. (En esto consiste el acercamiento a lo continuo ya que podremos fraccionar el día en deltas tan pequeños como la resolución o el sistema computacional lo permita). Entonces para representar el movimiento del Sol en el círculo movemos un indicador solar (amarillo), en sentido contrario a las manecillas del reloj, tantas divisiones como se hayan determinado de tal manera que en un día completemos la tasa diaria de  $0.98564733^\circ$ . Después determinamos una marca arbitraria pero fija, la cual representa la posición del Sol el día del solsticio de verano.

Para la Luna: La Luna cuando es llena está opuesta al Sol. La Luna cuando es nueva está en dirección del Sol. Esto nos lleva a colocar un indicador lunar en el círculo opuesto al Sol en Luna llena o coincidente con el Sol en la Luna nueva.

Ahora: El mes sidéreo de la Luna  $M_s$  = tiempo en que la Luna da una vuelta a la Tierra con respecto a las estrellas es  $M_s = 27.3215277 = 27d 7h 43m 11.5s$ . Entonces la luna se mueve:  $360^\circ/M_s = 13.1763585^\circ/\text{día}$ .

Movemos un indicador (azul) con esta tasa (en sentido contrario a las manecillas del reloj) o con fracciones de ella si así se requiere (Aquí de nuevo, nos acercamos a lo continuo tanto como lo permita el sistema computacional).

Para los Nodos: En el mes en que la Luna sale más al norte en su ciclo de 18.61 años los nodos lunares ascendente  $\Omega$  y descendente  $\Omega'$  están en los equinoccios. Entonces colocamos dos indicadores (uno para cada nodo) a  $90^\circ$  del Sol el día en que la Luna está más septentrional. El movimiento de los nodos se caracteriza por tener un movimiento en sentido contrario a como lo hacen el Sol y la Luna (retrogradación) cuya duración es de  $Pr = 18.61 \text{ año} = 6797.1573205$  días. Entonces debemos mover los indicadores de los nodos (rojos), en el mismo sentido de las manecillas del reloj, a una tasa de  $360^\circ/Pr = 0.05295864$  o fracciones de ella si se quiere.

A manera de resumen tenemos el siguiente algoritmo:

Posicionar adecuadamente el indicador solar S (amarillo) el día del solsticio de verano (hemisferio norte).

Mover S en el sentido contrario a las manecillas del reloj de acuerdo a la tasa escogida

Ingresar el indicador lunar L (azul) el día de la primera luna llena después del solsticio de verano (hemisferio norte)

Mover el indicador lunar L en el sentido contrario a las manecillas del reloj de acuerdo a la tasa escogida

Ingresar los indicadores de los nodos R (rojos) el día en que la luna se encuentra más septentrionalmente, en su período de retrogradación (18.61 años), en una posición a  $90^\circ$  del solsticio, es decir, sobre los puntos equinocciales

Mover  $\Omega$  y  $\Omega'$  en el sentido de las manecillas del reloj según la tasa escogida y en el mismo sentido de las agujas del reloj.

Si hay “coincidencia”, en un intervalo de  $15^\circ$  alrededor de los nodos, diremos que ha presentado un eclipse. Según su configuración lo clasificaremos en eclipse de Sol o eclipse de Luna

FIN DEL ALGORITMO.

## VALIDACION DEL MODELO

En este modelo, como en todo tipo de modelo, se han hecho varias simplificaciones y por tanto se han dejado de lado algunas consideraciones que afectan cuantitativamente los resultados, a tales consideraciones las podemos denominar fuentes de error. Algunas de ellas son más importantes que otras en cuanto a la repercusión en los cálculos que se efectúan para obtener las respectivas salidas del modelo. Por ejemplo, sabemos que en astronomía los errores se acumulan sobre todo en aquellos fenómenos que son periódicos o quasi-periódicos, en la medida que las condiciones periódicas de tales sistemas se repiten, los errores aumentan de tal manera que cantidades insignificantes cobran importancia en predicciones ulteriores muy alejadas en el tiempo. En este modelo se presentan tales inconvenientes. En la presentación (si esta se lleva a cabo) podremos mostrar este efecto en detalle y se podrá ver que a pesar de haber definido los parámetros temporales y las tasas con precisión muy alta de acuerdo con muchas cifras decimales significativas obtendremos después de varios años (15 años o más) resultados equivocados (no deseados de acuerdo a una precisión y confianza establecidas), es decir, el modelo pierde poder predictivo. Por ejemplo si el mes sideral lunar lo determinamos hasta con 7 cifras decimales confiables después de 12 años o más el modelo es limitado.

Otra fuente de error de consideración es el uso de valores promedios como estimador de algunos movimientos, por ejemplo el movimiento de retrogradación de los nodos lunares es supremamente irregular en su período de 18.61 años. Sus desviaciones son a veces muy grandes en comparación con el valor utilizado, por lo que la posición de estos podrá estar suficientemente mal determinada de tal manera que no es posible una predicción adecuada.

Otras fuentes de error son 1) La Tierra no se mueve uniformemente en su órbita alrededor del Sol debido a la forma elíptica con el Sol en uno de sus focos. 2) Los movimientos de la Luna los estamos considerando sobre la eclíptica con movimiento uniforme y en realidad la órbita de la Luna está inclinada hasta  $5^\circ$  con respecto a ésta, ver gráfico 03.

Una posible validación del modelo puede hacerse listando las predicciones de los eclipses futuros hechas con tal modelo y hacer una comparación directa con las listas proporcionadas en enlaces de internet de alta confiabilidad académica. Teniendo en cuenta las características de las fuentes de error, se considera que el modelo tendrá una capacidad de acierto entre el 60% y 70%, lo cual concuerda con pruebas llevadas a cabo previamente. Se puede errar en dos sentidos, predecir un eclipse no existente o dejar de predecir un eclipse que sí se presentará.

## LA PRESENTACIÓN

Se hará una presentación a modo de conferencia en la cual se ilustrarán desde los aspectos básicos de geometría, de matemáticas y de astronomía para el adecuado entendimiento del modelo, hasta su funcionamiento directamente en el ambiente Cabri Geometre II Plus. Si el tiempo lo permite se realizarán algunas comparaciones para evaluar la validez del modelo. La experiencia de esta construcción ha sido muy enriquecedora para el autor, en relación con muchas disciplinas ya que se encuentran aspectos de las matemáticas, la astronomía, la programación computacional, la geometría en Cabri, la historia y la prehistoria.

## BIBLIOGRAFIA

**Bohigas, X.** (1998). *Stonehenge, un observatorio astronómico*. En Revista UNIVERSO, Astronomía y Astronáutica. N° 41.

**Conde, G.** (2006). *Una Dinámica Practica para Predecir Eclipses*. Actas del IberoCabri 2006. Bogota.

**Couderc, P.** (1963). *Los Eclipses*. Buenos Aires: Ed. EUDEBA.

**Hoyle, F.** (1982). *De Stonehenge a la Cosmología Contemporanea*. Madrid: Alianza Editorial.

**Knuth, D.** (1973). *The Art of Computer Programming*. California: Addison Wesley.

**Krupp, E.** (1989). *En busqueda de las antiguas astronomías*. Madrid: Ediciones Pirámide.

**Feinstein, A.; Tignanelli, H.** (2005). *Objetivo Universo*. Buenos Aires: Ediciones Colihue.

**Maza Sancho, J.** (2000). *Curso EH28A*. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Departamento de Astronomía U. de Chile, Marzo 2000. Disponible en: <http://www.das.uchile.cl/~jose/introduccion.html>

**Tellechea Armenta, E.** (1998). *Congruencias*. Departamento de matemáticas U. de Sonora. Disponible en: <http://olimpiada.mat.uson.mx/congru/cursoent.html>

### Enlaces de Internet utilizados

Curso de Astronomía Mailxmail.com. <http://www.mailxmail.com/>

FOED. Astronomía de posición: <http://www.astrogea.org/coordenada/index.htm#sol>

Eclipses on line: <http://astrosurf.com/obsmcabreja/eclipse/eclipse-online.html>

Para transformar coordenadas ecuatoriales a eclípticas:

<http://www.geocites.com/xgarciaf/java/trasfor1.htm>