PATRONES Y REGULARIDADES

(1) Javier Martínez Plazas – (2) Luis Eduardo Torres García –

(3) Flor Viviana Delgado Ortiz

(1) javiermartinezplazas@yahoo.com – (2) rector@uniamazonia.edu.co –

(3) vivianadelgado87@hotmail.com

Universidad de la Amazonia. COLOMBIA

RESUMEN

El pensamiento variacional se considera como uno de los pilares en el estudio de las matemáticas, en los Estándares para la Excelencia en la Educación (MEN, 2002) se manifiesta: "Este componente del currículo tiene en cuenta una de las aplicaciones más importantes de la matemática, cual es la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos" situación que ha llevado a pensar que sea éste quien permea todos los pensamientos, hecho que causa molestia en algunos teóricos, empero sigue "debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas". Teniendo en cuenta lo anterior, la Universidad de la Amazonia en la Licenciatura en Matemáticas y Física, en el espacio académico Tratamiento de la Variación, se estudia el pensamiento variacional de tal manera que a partir de las regularidades y los patrones, el estudiante se prepare para el estudio de funciones, límites, derivadas e integrales. La aparición del Cabri 3D en el marco del II Congreso Iberoamericano de Cabri, 2006, nos permitió avanzar en el estudio de patrones y regularidades que en otros ambientes de geometría dinámica eran más complejos de construir y de analizar, situación que permitió al estudiante comprender fácilmente la construcción del cuerpo a partir del patrón y la regularidad que en el proceso se genera.

INTRODUCCIÓN

El pensamiento variacional se considera como uno de los pilares en el estudio de las matemáticas, en los Estándares para la Excelencia en la Educación (MEN, 2002) se manifiesta: *"Este componente del currículo tiene en cuenta una de las aplicaciones más importantes de la matemática, cual es la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos"* situación que ha llevado a pensar que sea éste quien permea todos los pensamientos, hecho que causa molestia en algunos teóricos, empero sigue "debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas". Teniendo en cuenta lo anterior, la Universidad de la Amazonia en la Licenciatura en Matemáticas y Física, en el espacio académico Tratamiento de la Variación, se estudia el pensamiento variacional de tal manera que a partir de las regularidades y los patrones, el estudiante se prepare para el estudio de funciones, límites, derivadas e integrales.

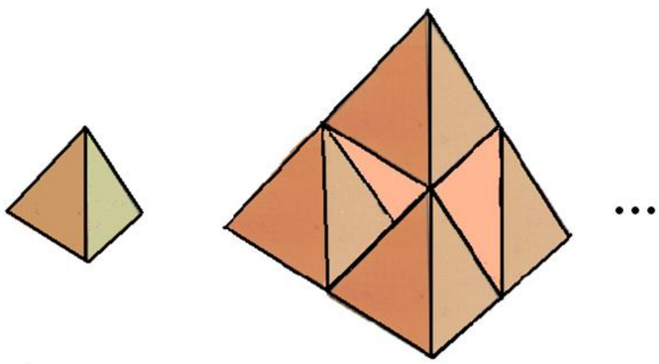
La aparición del Cabri 3D en el marco del II Congreso Iberoamericano de Cabri, 2006, nos permitió avanzar en el estudio de patrones y regularidades que en otros ambientes de geometría dinámica eran más complejos de construir y de analizar, situación que permitió al estudiante comprender fácilmente la construcción del cuerpo a partir del patrón y la regularidad que en el proceso se genera.

TETRAEDRO Y CUERPO TETRAEDRO

Una de las situación que hemos trabajando en el Cabri 3D es la formación de un cuerpo tetraedro a partir de un tetraedro. De ahora en adelante cuando se hable de *tetraedro* se hará mención al sólido geométrico convencional y cuando se hable de *cuerpo tetraedro* se hará mención a un conjunto de tetraedros ubicados de tal manera que se conserve la estructura del tetraedro base.

EL TALLER

Observa el siguiente patrón y responde las preguntas que de él se formulan.



Cuerpos. La secuencia anterior está conformada por tetraedros regulares.

a) Con base en la figura, describa la forma en la que se puede construir cada figura a partir de la figura anterior.

b) ¿Diga con cuántos tetraedros está construido el cuerpo que ubica la posición 5?

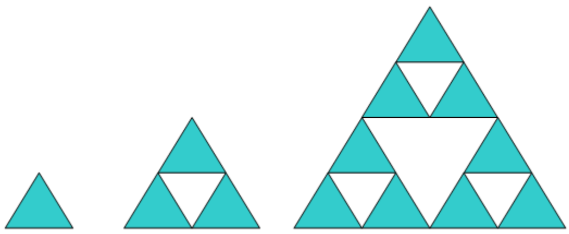
c) ¿Qué relación existe entre el número de tetraedros del cuerpo de la primera posición y el número de tetraedros de la segunda posición? Se podrá generalizar esta relación para cualquier par de cuerpos en posiciones consecutivas? Justifique.

d) ¿Qué relación existe entre el número de tetraedros del cuerpo de la posición 3 y 4 con el tetraedro de la primera posición?

e) Con base en la secuencia llena la siguiente tabla:

N° Posición	1	2		5		10	13
N° Tetraedros	1	4	16		4096		

Caras. Cada una de las caras de los cuerpos de la secuencia anterior constituye un nuevo patrón formado por triángulos, como se muestra en la siguiente figura:



a) Con base en este patrón, describa la forma en la que se puede construir cada figura a partir de la figura anterior.

b) ¿Cuántos triángulos sombreados y cuántos en blanco se encuentran en la figura de la posición 5?

c) Llene la siguiente tabla:

Posición / Característica	1	2	3	4	5	7	10	13	15
Número de triángulos en blanco									
Número de triángulos azules									
Número total de triángulos									

a) Con la expresión $k+3^{n-1}$ se puede obtener el número de triángulos blancos y sombreados de la figura que ocupa la posición n. En este caso qué representa el parámetro k ?

b) En la figura que tiene 6561 triángulos blancos, ¿En qué valor es menor este número con respecto al número de triángulos sombreados?

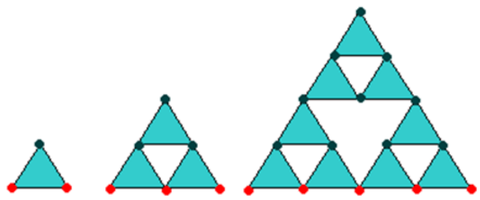
c) Asuma el triángulo de la primera posición como unidad de área. Con base en esta información diga cuál es el área total de los triángulos que se encuentran en las posiciones 7 y 12. Describa un procedimiento para calcular el área de un triángulo en cualquier posición.

Bordes (aristas).

Asuma ahora el lado del triángulo de la primera posición como la unidad de longitud. Con base en esta información diga cuál es el perímetro de los triángulos que se encuentran en las posiciones 8, 13 y 20. Describa un procedimiento que permita calcular el perímetro de cualquier triángulo en cualquier posición.

Vértices.

Observe que con base en la secuencia de triángulos formada en II (CARAS) se puede considerar el número de vértices que se encuentra en la base de cada triángulo tal y como se muestra a continuación:



a) Exprese la relación entre la posición de la figura y el número de vértices en la base del triángulo.

b) ¿Existe alguna relación entre el número de vértices en la base del triángulo y el número total de vértices en el triángulo?

c) Consulte los llamados “números triangulares” y establezca algunas relaciones de implicación entre estos números y los valores encontrados en el inciso anterior.

d) Con base en toda la información de esta situación llena la siguiente tabla:

Número de la Posición	*1*	*5*	*10*	...	*n*
Número de Tetraedros	1			…	
Número de triángulos	1			…	
Número de segmentos				…	
N° de vértices en la base				…	
N° de vértices en los tetraedros				…	

INCONVENIENTES

El primer inconveniente que se tuvo fue el manejo espacial del cuerpo tetraedro, primero la gráfica no era muy explícita, pues no se observaban los tetraedros. Segundo, a pesar que los estudiantes venían de un curso de geometría no tenían claro lo que era un tetraedro. Tercero, algunas preguntas tenían ambigüedades.

En el momento de desarrollar el taller a puro papel; es decir, con el registro impreso, el estudiante no entendía la forma del cuerpo tetraedro, consideraba que el tetraedro tenía cuatro vértices en la base y esto dañaba la construcción. Otro inconveniente es que no visualizaba el patrón y comenzaba de manera extraña a construir el cuerpo tetraedro.

La formalización no tuvo mayor dificultad, puesto que los estudiantes (simple hipótesis) son muy expertos en el momento de funcionar mecánicamente, sin embargo la falta de trabajo en este tipo de ejercicios hizo que se demoraran y necesitaran de asesoría especializada.

RESULTADOS

Antes de trabajar con el Cabri 3D encontramos múltiples respuestas erróneas, cuando se dio asesoría las respuestas mejoraron un poco, aquí algunas de ellas:

1. **Cuerpos**.
   a) Por dos caras del tetraedro inicial le colocamos dos nuevos tetraedros en las bases, y un tercer tetraedro en oposición el vértice de las dos caras iniciales, y luego colocamos un cuarto tetraedro sobre los cuatro vértices superiores.

Se toma el tetraedro inicial y sobre cada uno de los vértices de la base se ubica un nuevo tetraedro. Para formar el tetraedro siguiente se realiza el mismo procedimiento teniendo en cuenta que este tendrá 9 puntos en la base, por tanto se tendrá que colocar 9 tetraedros formando una base cuadrada cuyo lado tiene tres tetraedros. El cuarto tetraedro tendrá 16 puntos en la base, por tanto se tendrá que colocar 16 tetraedros formando una base cuadrada cuyo lado tiene cuatro tetraedros. El proceso se repite.

b) En la posición cinco habrán 625 tetraedros.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

c) Existe una razón de 1 a 5, si conocemos cuantos tetraedros hay en una determinada posición lo multiplicamos por cinco y así conocemos cuantos tetraedros habrá en la siguiente posición, por defecto si no conocemos cuantos tetraedros hay en una determinada posición utilizaremos la siguiente ecuación, numero de tetraedros de la posición N = 5(N-1) . y luego la multiplicamos por cinco para obtener el número de tetraedros de la siguiente posición. Ó utilizamos esta ecuación y determinamos el número de tetraedros de la posición que queremos saber.

El primer tetraedro tiene 2 vértices en la base por cada lado y ese es el número de tetraedros que deben colocarse en la base para formar en nuevo tetraedro. En el ítem a. se expresa en mayor detalle esta situación. Se puede expresar la cantidad de tetraedros por cuerpo como 1^2, 1^2+2^2, $1^2+2^2+3^2$, $1^2+2^2+3^2+4^2$, … , $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2$, …

d) El cuerpo de la posición 3 contiene 14 tetraedros de la posición inicial y el cuerpo de la posición 4 contiene 30 tetraedros de la posición inicial.

2. Caras.

a) Se ubica el triángulo azul junto con otro al lado derecho de él y sobre el vértice superior de ambos se ubica otro triángulo azul. Al triángulo anterior se le ubica otro igual al lado derecho de éste y sobre el vértice superior de los dos se coloca otro de los mismos. Este proceso se repite con la figura que se va generando en cada paso.

El resto de preguntas quedaron en blanco, sin responder.

3. Bordes (Aristas).

El número de segmentos por lado, se incrementa a razón de 2^{n-1} por lo que el perímetro ha de ser

$P_n=3(2^{n-1})$.

Para n=8, tenemos: $P_8=3(2^{8-1})=3(2^7)=384$

Para n=13, tenemos: $P_{13}=3(2^{13-1})=3(2^{12})=12288$

Para n=8, tenemos: $P_{20}=3(2^{20-1})=3(2^{19})=1572864$

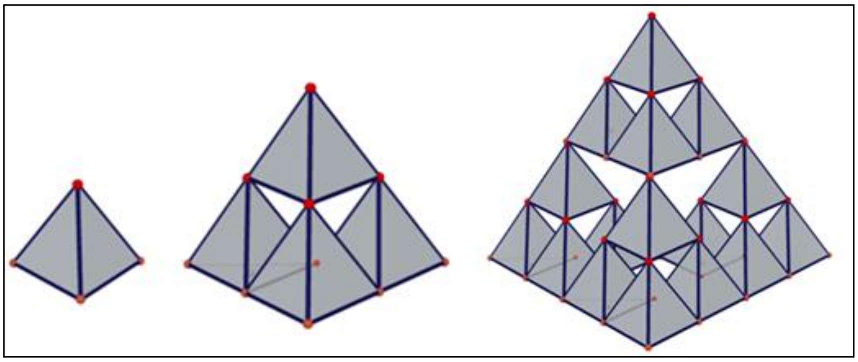
El resto de preguntas quedaron en blanco, sin responder.

4. Vértices.

Las preguntas no se respondieron.

AVANCES

Dentro de los avances que se tuvo en el proceso, inicialmente -aunque parezca insustancial- el mejorar el gráfico de los cuerpos facilitó el manejo espacial y la comprensión de la regularidad.



El aporte significativo que se tuvo al incorporar el Cabri 3D, fue la manipulación del tetraedro (patrón) para la creación de los cuerpos que determinan la regularidad. Es en este momento donde el estudiante se encuentra cara a cara con la regularidad e identifica claramente el patrón y puede determinar sin equivocación la regularidad de proceso.

No se encontró una sola forma de construir el cuerpo tetraedro, cuando el estudiante determinaba su tetraedro patrón, comenzaba la construcción del cuerpo y luego reproducía dicha idea en la construcción de los nuevos cuerpos tetraedros, hasta lograr encontrar la regularidad solicitada. Sin embargo, se daban cuenta al final del proceso que tan solo divergía del tetraedro patrón que escogieran.

Utilizar (jugar) la función Bola de Cristal en la indagación adicional de la regularidad para las caras, los vértices y las aristas, permitió ver el ejercicio como un todo y no como particiones incomunicadas, como ocurrió en la génesis del trabajo.

Posterior del trabajo con Cabri 3D las respuestas mejoraron, aquí una de ellas:

1. **Cuerpos.**
   a) Se toma el tetraedro inicial y sobre cada uno de los vértices de la base se ubica un nuevo tetraedro, de manera que la base del nuevo tetraedro sea un triángulo equilátero. Para formar el tetraedro siguiente se realiza el mismo procedimiento teniendo en cuenta que este nuevo tetraedro será construido a partir de la figura anterior. Y así sucesivamente se construyen las figuras siguientes.
   b) para calcular en número de tetraedros que forma la Figuera de la posición cinco, utilizamos la ecuación $4(n-1)$, donde n representa la posición.
   $4(5-1)=256$, de esta manera obtenemos que la posición cinco está conformada por 256 tetraedros.
   c) La relación es la siguiente: con cuatro tetraedros de la posición uno, construimos la figura de la posición dos, la cual nos genera un nuevo tetraedro, logrando así que esta generalidad se cumpla para cualquier par de posiciones consecutivas, tomando el tetraedro de la posición anterior como un solo tetraedro.
   d) La relación que existe es que la figura de la posición inicial es un tetraedro, el de la tercera la cuarta y el de la posición enésima va seguir siendo un tetraedro.
   e)

N° Posición	1	2	3	5	7	10	13
N° Tetraedros	1	4	16	256	4096	262144	16777216

2. **Caras.**
   a) Al triángulo inicial se le ubica otro igual en uno de los lados de su base, y sobre sus vértices superiores se ubica un tercer triángulo igual al inicial. Cumpliéndose esta regla para cualquier par de posiciones consecutivas.

b) Utilizando las ecuaciones 3n-2 para los cuadros blancos, partiendo de la segunda posición ya que es aquí donde aparece el primer triangulo en blanco; y la ecuación 3n-1 para los cuadros azules.

En la figura de la posición cinco habrá 81 cuadros sombreados y 27 triángulos blancos.

c)

Posición / **Característica**	1	2	3	4	5	7	10	13	15
Número de triángulos en blanco	0	1	3	9	27	243	6561	177147	1594323
Número de triángulos azules	1	3	9	27	81	729	19683	531441	4782969
Número total de triángulos	1	4	12	36	108	927	26244	708588	6377292

c)1. El valor k representa una constante la cual será el total de triángulos blancos, donde k es equivalente a 3n-2

c)2. Es menor en una posición, ya que la figura que tendrá 6561 triángulos en blancos es la decima, por defecto la figura de la posición nueve tendrá la misma cantidad pero de triángulos azules

c)3. Se toma la misma fórmula de los triángulos azules, así tendremos que en la posición 7 es 729 y en la 12 es 177147; en tal caso si se cuentan los triángulos en blancos en 7 es 972 y en 12 es 236196, en este caso se toman las dos ecuaciones y se suman los resultados

3. Bordes (aristas).

El número de segmentos por lado, se incrementa a razón de 2^{n-1} por lo que el perímetro ha de ser $P_n=3(2^{n-1})$.

Para n=8, tenemos: $P_8=3(2^{8-1})=3(2^7)=384$

Para n=13, tenemos: $P_{13}=3(2^{13-1})=3(2^{12})=12288$

Para n=8, tenemos: $P_{20}=3(2^{20-1})=3(2^{19})=1572864$

4. Vértices

a) La relación que se encontró, es 2n, donde n es el número de la posición.

b) Disminuye de uno en uno

c)

Número de la Posición	***1***	***5***	***10***	…	***n***
Número de Tetraedros	1	625	9765625	…	4^{n-1}
Número de triángulos	1	108	59049	…	3^{n-1}
Número de segmentos	3	243	59049	…	3^{n}
N° de vértices en la base	2	32	1024	…	2^{n}
N° de vértices en los tetraedros	4	1024	1048576	…	4^{n}

BIBLIOGRAFÍA

Castiblanco, A. y otros (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Ministerio de Educación Nacional (2002). *Estándares para la excelencia en la educación*. Creamos Alternativas Ltda,

Posada, M. y otros (2005). Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Medellín: Digital Express Ltda.

Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano (2006). *Memorias IberoCabri2006*. Bogotá.