

## GÉNESIS INSTRUMENTAL DEL DESPLAZAMIENTO EN CABRI-GEOMETRE POR ALUMNOS DE 11-12 AÑOS

Angela María RESTREPO

[angelamars@yahoo.com](mailto:angelamars@yahoo.com)

**Universidad Joseph Fourier. FRANCIA**

### RESUMEN

*El desplazamiento es un elemento fundamental de la geometría dinámica. Nos permite pasar de una geometría estática, en la cual los objetos sobre los cuales se trabaja son dibujos en configuraciones particulares, a una geometría dinámica, en la cual las construcciones conservan las propiedades geométricas durante el movimiento. Sin embargo, los trabajos muestran que la apropiación del uso del desplazamiento no es inmediata ni evidente, así como entender los efectos que se obtienen al desplazar tanto para los estudiantes como para los profesores, y su utilización puede resultar problemática. Nos interesamos entonces al estudio de la génesis instrumental del desplazamiento (Rabardel, 1995; Trouche, 2003), a las utilizaciones que le pueden dar los alumnos de 11-12 años y a la manera como interpretan los efectos obtenidos. Para poder observar el proceso de apropiación del desplazamiento, llevamos a cabo una serie de situaciones experimentales con dos clases de 6ème (primer año de secundaria) durante un año escolar acompañando el proceso de aprendizaje. En las sesiones, organizadas con el profesor para que fueran parte integral del curso de matemáticas, los alumnos trabajaban en parejas en Cabri-géomètre y luego se organizaba una fase de puesta en común en la cual se validaban e invalidaban las estrategias utilizadas por los alumnos, para luego institucionalizar el concepto matemático trabajado. Mostraremos entonces algunas de las situaciones trabajadas en clase con los alumnos y los resultados obtenidos, así como la clasificación de instrumentos desplazamiento que elaboramos, basándonos en los trabajos de Arzarello (2002) y Olivero (2002).*

El desplazamiento es un elemento fundamental de la geometría dinámica. Nos permite pasar de una geometría estática, en la cual los objetos sobre los cuales se trabaja son dibujos en configuraciones particulares, a una geometría dinámica, en la cual las construcciones conservan las propiedades geométricas durante el movimiento. Sin embargo, la apropiación del uso del desplazamiento no es inmediata ni evidente, así como entender los efectos que se obtienen al desplazar tanto para los estudiantes como para los profesores, y su utilización puede resultar problemática. Bellemain y Capponi (1992) observaron que para la mayoría de los alumnos aprender a desplazar para validar

su construcción es una gran dificultad, pues prefieren llamar al profesor para qué el lo haga o pedirle permiso antes de hacerlo. Ciertos alumnos no interpretan los efectos producidos al desplazar geométricamente o según lo que espera el profesor (Balacheff y Soury-Lavergne, 1996). Un estudiante se puede contentar de decir que una construcción se agranda o se achica, o que se mueve hacia arriba o hacia abajo, dando explicaciones descriptivas y espaciales, y no entrar en un razonamiento matemático.

En cuanto a los profesores, Rolet (1996) observó que los estudiantes en formación para ser profesores de primaria daban más importancia a las propiedades espaciales contingentes del dibujo (como la posición de los puntos, la orientación de los segmentos, etc.) que a las verdaderas propiedades geométricas de la figura.

Utilizaban muy poco el desplazamiento para validar sus construcciones, puesto que para ellos era suficiente imponer propiedades geométricas durante la construcción y no sentían la necesidad de desplazar para validar ésta. También observó que al desplazar, preferían quedarse en un espacio limitado para no “destruir” la construcción. Acosta (2008) observó incluso que hay quienes se las ingenian para hacer construcciones en las cuales no se le da cabida al desplazamiento.

La necesidad de utilizar el desplazamiento no sólo debe surgir de los estudiantes, sino que debe ser estimulada por los profesores y por la situación misma. La mayoría de los problemas propuestos por los profesores de secundaria en los cuales interviene la geometría dinámica se basan en ejercicios clásicos de papel y lápiz, dándole al desplazamiento una utilización muy limitada. La mayoría de estos ejercicios utilizan el desplazamiento para constatar propiedades geométricas<sup>1</sup>; en cambio, problemas en los cuales los alumnos deben utilizar el desplazamiento para conjeturar a partir de una construcción geométrica o validar las propiedades geométricas de una construcción son casi inexistentes (Tapan 2006).

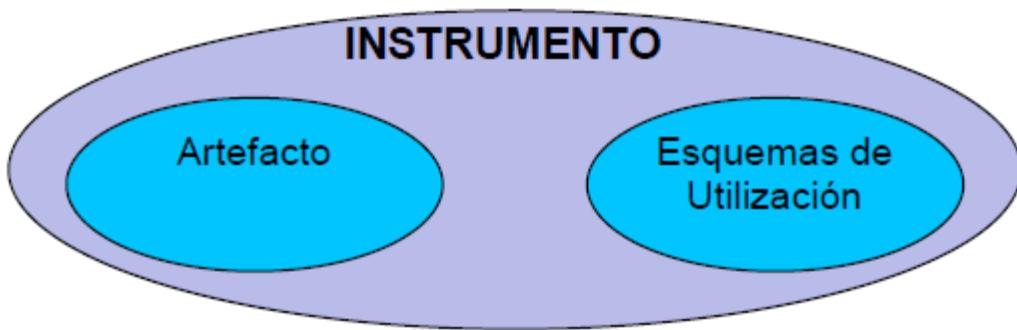
Estos trabajos convergen sobre el hecho de que la apropiación del uso del desplazamiento es un proceso largo y complejo que necesita ser acompañado y organizado por el profesor. En esta ponencia damos cuenta de una investigación en la

<sup>1</sup> Por ejemplo, pedirle a los alumnos que construyan un triángulo ABC rectángulo en A, que midan AB, AC y BC y que comparén  $BC^2$  y  $AB^2+AC^2$ , y hacerles finalmente constatar que la igualdad se mantiene aun al desplazar los puntos A, B y C.

que nos interesamos al proceso de apropiación del uso del desplazamiento. Trataremos de dar elementos que puedan favorecer y facilitar este proceso.

## MARCO TEÓRICO

Para estudiar el proceso de apropiación del uso del desplazamiento por los alumnos nos apoyamos en la teoría instrumental (Rabardel (1995), Trouche (2003)). Según Rabardel (1995), el instrumento no es dado al sujeto, sino que es una construcción hecha por el sujeto que resulta de su interacción con el artefacto; un instrumento es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción. A partir de un mismo artefacto, el sujeto puede construir varios instrumentos.



**Figura 1. El instrumento es una entidad mixta que contiene a la vez el artefacto y esquemas de utilización construidos por el sujeto**

Estudiaremos el artefacto “Desplazamiento” en Cabri-géomètre y los instrumentos que se pueden construir a partir de éste. Los instrumentos se construyen durante el proceso de *génesis instrumental*. Este proceso consta a su vez del proceso de *instrumentación*, en el cual el sujeto elabora los *esquemas de utilización* y los modifica y/o adapta a la situación, y del proceso de *instrumentalización*, en el cual el sujeto puede modificar el artefacto. La génesis instrumental es un proceso largo y complejo que toma tiempo.

Para estudiar los esquemas de utilización, retomamos la definición dada por Vergnaud (1990): “Llamamos “esquema” la organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones.”

Un esquema está compuesto por:

- Anticipaciones (del objetivo a alcanzar, de los efectos que se esperan obtener y de las posibles etapas intermedias);
- Reglas de acción de tipo “si {condición} entonces {acción}” que permiten generar las acciones del sujeto;
- Inferencias que permiten calcular las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones;
- Invariantes operatorios que le permiten al sujeto reconocer los elementos claves de la situación.

Se distinguen tres tipos de invariantes operatorios:

- de tipo “proposiciones”: que pueden ser verdaderos o falsos, como los “teoremas-en-acto”;
- de tipo “función preposicional”: ni verdaderos, ni falsos. Indispensables a la construcción de las proposiciones; como los “conceptos-en-acto” o las “categorías-en-acto”;
- de tipo “argumentos” que permiten pasar de las funciones preposicionales a las proposiciones.

## INSTRUMENTOS “DESPLAZAMIENTO”

Autores como Arzarello (2002) u Olivero (2002) se interesaron en los usos del desplazamiento cuando los alumnos están resolviendo un problema abierto utilizando Cabri-géomètre.

Algunos de esos desplazamientos son por ejemplo:

- Desplazamiento errático (wandering dragging): desplazar de manera aleatoria los puntos básicos, sin un plan preciso, para descubrir configuraciones interesantes o regularidades de la figura.
- Desplazamiento limitado (bound dragging): desplazar puntos semi-desplazables, es decir puntos sobre un objeto y que sólo pueden ser desplazados sobre éste.
- Desplazamiento guiado (guided dragging): desplazar un punto básico para que la construcción guarde una propiedad geométrica; el punto sigue una trayectoria, así el alumno no sea consciente de ello: el lugar no es visible a él.

- Desplazamiento para validar/ invalidar una construcción (dragging test): desplazar los puntos básicos para ver si la construcción conserva las propiedades aparentes del estado inicial. Si es el caso, entonces la figura pasa la prueba; de lo contrario, la figura es invalidada, la construcción no fue construida según las propiedades geométricas esperadas.

Lulu Healy (2000) introdujo la distinción entre construcciones *robustas* y construcciones *blandas*. En las construcciones blandas, a diferencia de las construcciones robustas, no se usan todas las propiedades geométricas dadas: el desplazamiento hace parte de la construcción, puesto que permite obtener las (o las) propiedad(es) que falta(n) de manera contingente. En el caso de una construcción robusta, la figura tiene todas las propiedades que se espera que tenga. Por ejemplo, la construcción robusta de un rectángulo lleva a que después de haberlo desplazado, la figura siga siendo un rectángulo durante el movimiento. En cambio, una manera de obtener un rectángulo de manera blanda, es utilizando el desplazamiento en un paralelogramo hasta obtener un ángulo recto y lograr la apariencia de un rectángulo.

A partir de lo dicho anteriormente, podemos entonces definir el desplazamiento *blando* como aquel que se utiliza en las construcciones blandas para obtener las propiedades faltantes.

Olivero (2002) distingue dos maneras de *ver* y de utilizar el desplazamiento:

**El foto-desplazamiento o desplazamiento discreto:** “Modalidad que sugiere una secuencia discreta de imágenes durante el tiempo: el sujeto observa el estado inicial y el estado final de la figura, sin tomar en cuenta los estados intermediarios. El objetivo es obtener una figura particular.”<sup>2</sup>

**El cine-desplazamiento o desplazamiento continuo:** “Modalidad que sugiere una película: el sujeto observa la variación de la figura durante el movimiento y de las

---

<sup>2</sup> Traducción del autor.

relaciones entre los elementos de la figura. El objetivo del desplazamiento es la variación de la figura en sí.”<sup>3</sup>

A partir del estudio de los usos del desplazamiento y apoyándonos en la teoría instrumental, proponemos una nueva clasificación de los instrumentos “Desplazamiento”, más general que la de Arzarello (2002) y Olivero (2002), puesto que esa se limita al uso de éste durante la búsqueda de conjeturas y de prueba de las mismas. Distinguimos los instrumentos definidos por las características y los límites del artefacto, de los instrumentos definidos por la finalidad matemática que se busca alcanzar. Algunos de los instrumentos incluidos en nuestra clasificación son:

- Desplazamiento para ajustar: es utilizado por los alumnos que no tienen los conocimientos suficientes para construir una figura robusta y que piensan que esta estrategia es suficiente para obtener la figura correcta.
- Desplazamiento blando o guiado (guided dragging): es utilizado para desplazar los puntos básicos de la construcción para darle, momentáneamente, una forma o propiedades particulares.

#### Desplazamientos exploratorios:

- Desplazamiento para identificar los invariantes de la figura: dada una construcción, desplazar los puntos básicos para identificar sus invariantes. Así se pueden identificar las propiedades geométricas de la figura.
- Desplazamiento para constatar las variaciones durante el movimiento: desplazar los puntos de una construcción para ver las regularidades durante la variación, ver lo que cambia y lo que se conserva.
- Desplazamiento para encontrar la trayectoria de un punto: desplazar un punto e identificar su trayectoria, es decir, el objeto geométrico que describe el punto.

#### Desplazamientos para validar /invalidar:

- Desplazamientos para validar /invalidar una construcción (dragging test): desplazar los puntos básicos para ver si la construcción conserva las propiedades aparentes del estado inicial. Si es el caso, entonces la figura pasa la prueba; de lo contrario, la

<sup>3</sup> Traducción del autor.

figura es invalidada: la construcción no fue construida según las propiedades geométricas esperadas.

- Desplazamientos para validar /invalidar una conjetura: desplazar los puntos básicos de una construcción para validar una conjetura establecida a partir de la observación de invariantes de la figura. La conjetura es invalidada si es posible encontrar una posición en la cual ésta no es verdadera; si no es posible encontrar un contra-ejemplo, la conjetura debe ser demostrada.

## OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Al interesarnos al proceso de apropiación del uso del desplazamiento por los alumnos, nuestros objetivos principales eran los siguientes:

- Estudiar la génesis instrumental del desplazamiento de los alumnos, el proceso de apropiación del desplazamiento y sus etapas
- Ver qué instrumentos desplazamiento construyen los estudiantes durante esta génesis instrumental
- Ver si los alumnos se responsabilizan de la validación de sus construcciones desplazando
- Identificar esquemas e invariantes en las estrategias utilizadas por los alumnos

Para lograr nuestros objetivos, diseñamos una serie de situaciones utilizando Cabri-géomètre que nos permitieran observar y acompañar a un grupo de estudiantes durante el proceso de apropiación del desplazamiento. Las situaciones se propusieron en sesiones que hacían parte integral del curso de matemáticas, por lo cual debían adaptarse al programa escolar y permitían introducir nociones nuevas de geometría o profundizar algunas ya vistas en clase. Las situaciones utilizadas fueron escogidas de situaciones propuestas en el proyecto MAGI (Mejor Aprender la Geometría gracias a la Informática), otras fueron creadas especialmente para este proyecto o fueron adaptadas a partir de situaciones en papel y lápiz.

Trabajamos con 2 clases de 6ème (primer año de secundaria en Francia, 11-12 años), que establece el puente entre la primaria y la secundaria. Durante las sesiones, los alumnos trabajaban en parejas con el fin de propiciar una interacción entre los alumnos

e incitarlos a verbalizar sus acciones. Grabamos el trabajo en el computador de algunos alumnos (4 parejas por clase), así como los diálogos intercambiados, y filmamos el desarrollo de las sesiones para poder estudiar los momentos de puesta en común. En total, llevamos a cabo un poco más de 15 sesiones (1 a 2 por mes, desde octubre hasta mayo) en las cuales la clase se llevaba a cabo en la sala informática.

El desarrollo en general de las sesiones con Cabri-géomètre era el siguiente:

- Una fase de exploración en parejas
- Una fase de puesta en común, organizada alrededor de un computador conectado a un video proyector, en la cual un alumno “piloto”, escogido por el profesor, trabajaba en el computador conectado al proyector para mostrarle a la clase las estrategias utilizadas y así poder validarlas/invalidarlas en grupo
- Una fase de institucionalización (Brousseau, 1998) en la cual se retomaban elementos de la discusión en común

## SITUACIONES Y METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Puesto que el análisis de cada situación requiere de una cantidad de tiempo considerable, no podíamos analizar todas las situaciones que llevamos a cabo. De las 15 situaciones, escogimos 6 que analizamos en detalle. Estas 6 situaciones fueron escogidas teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- Se extienden a lo largo del año escolar, desde las fases de iniciación al software hasta la última sesión en la cual los alumnos utilizaron Cabri-géomètre
- Permiten observar diferentes instrumentos “Desplazamiento” que deben ser utilizados y construidos a priori
- Tienen objetivos matemáticos distintos y son actividades de naturaleza distinta (actividad de construcción, exploración, ...)

En la siguiente tabla sintetizamos las seis situaciones escogidas:

La situación	Fecha	Tipo de actividad	Rol del desplazamiento	Noción matemática
Geo	10/10/2006	Exploración	No finalizado	Iniciación al software y al desplazamiento

Un auto sin rueda	13/10/2006	Construcción	Validar/Invalidar	Punto medio de dos puntos o de segmento
¿Sobre qué objeto?	15/12/2006	Exploración y construcción	Identificar la trayectoria	Identificación de trayectoria a objetos geométricos
Tres colores	13-03-2007 y 23-03-2007	Identificación	Identificar los invariantes; Validar/Invalidar la conjetura	Diferenciar las verdaderas propiedades geométricas de la figura de las propiedades aparentes
Construir el simétrico	27/04/2007	Construcción	Identificar las variaciones ; Validar/Invalidar la construcción	Construir el simétrico de un punto con respecto a una recta
Rectángulos a completar	25/05/2007	Construcción	Validar/Invalidar la construcción	Trabajo sobre el alineamiento y las propiedades geométricas del rectángulo (ángulos rectos)

Analizamos de la siguiente manera los videos de los alumnos:

Identificación de esquemas:

- los invariantes utilizados por un mismo alumno (o pareja) en distintas situaciones;
- los invariantes utilizados por varios alumnos en una misma situación;

Identificación de conceptos-en-acto sobre los cuales se apoyan las estrategias de los alumnos;

Identificación de instrumentos desplazamiento que construyen los alumnos, finalidad con que los utilizan e interpretación dada

Las fases de puesta en común nos permitieron:

Estudiar las intervenciones y la influencia del profesor en la génesis instrumental;

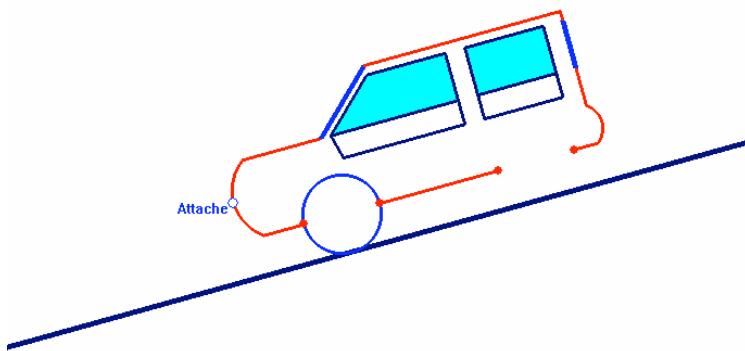
Estudiar el rol del alumno “piloto” que manipulaba el computador conectado al proyector y las intervenciones de los alumnos durante esta fase;

Ver si hay instrumentos “Desplazamiento” institucionalizados y construidos socialmente

Por falta de espacio, sólo presentaremos una de las actividades utilizadas en nuestro trabajo de investigación y algunos resultados observados.

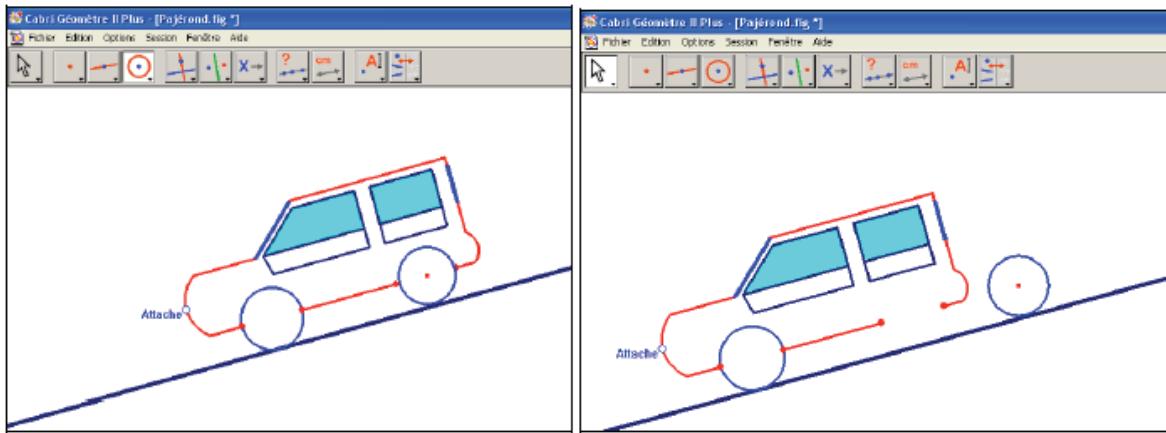
## UN AUTOMÓVIL SIN RUEDA

“Un auto sin rueda” es una situación diseñada en el proyecto MAGI para los últimos años de primaria, pero que puede ser utilizada un poco más adelante como situación de introducción al software. Es una situación simple en la cual el objetivo principal es que los alumnos entiendan que es necesario pasar por la construcción explícita del punto medio de dos puntos utilizando herramientas matemáticas. Esta situación nos permite introducir el uso del desplazamiento para validar e invalidar una construcción de una manera simple y fácil de entender.



**Figura 2. “Un auto sin rueda”: el automóvil al cual le hace falta una rueda**

A partir del dibujo, los alumnos entienden rápidamente que lo que deben hacer es construir la rueda que le hace falta al automóvil, construyendo una circunferencia cuyo diámetro son los dos puntos visibles de la carrocería. La primera estrategia consiste en intentar construir una circunferencia a ojo. Sin embargo, el profesor explica que el automóvil debe avanzar: el contexto le da entonces sentido al desplazamiento. Pero al desplazar el automóvil, la rueda se queda estática y el automóvil avanza.



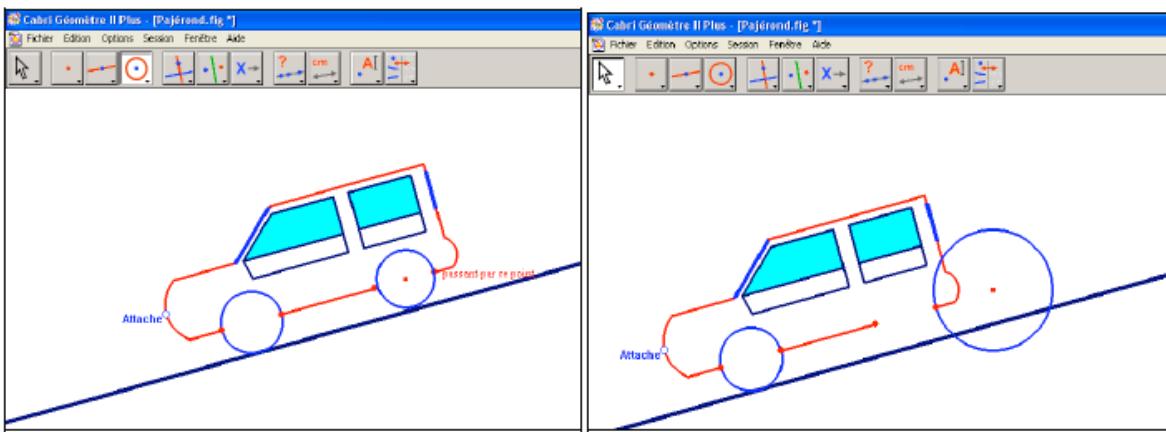
**Figura 3. El automóvil avanza y la rueda se queda estática**

Siendo la situación cercana a la realidad, los estudiantes pueden anticipar y ver que en el desplazamiento del automóvil no es normal que la rueda no avance, lo cual les permite invalidar esta estrategia errónea.

Cabri-géomètre no permite la construcción de una circunferencia cuyo diámetro es un segmento definido por dos puntos dados, por lo cual los alumnos se ven obligados a pasar por la construcción explícita del punto medio.

Los alumnos no necesariamente pasan de directamente de la primera estrategia a la correcta directamente, sino que intentan poner varias veces el centro del círculo a ojo, “bien en el medio”.

Algunos intentan incluso “amarollar” la rueda al automóvil a uno de los puntos de la carrocería, pero de nuevo el desplazamiento invalida esta estrategia errónea.



**Figura 4. Construir un círculo pasando por uno de los puntos de la carrocería no es suficiente; los alumnos deben pasar por la construcción del punto medio**

En “un auto sin rueda”, el desplazamiento no necesariamente permite obtener la solución, ni ayuda tampoco a encontrar la estrategia óptima, pero gracias a las invalidaciones que permite obtener, los alumnos entienden mejor la situación.

Gracias a la anticipación del comportamiento de la construcción, los alumnos logran invalidar las estrategias erróneas y continúan buscando la estrategia correcta. Dicha anticipación a veces no es posible en situaciones más matemáticas.

## CONCLUSIONES

El proceso de apropiación del uso del desplazamiento es largo y complejo. Pensamos que introducirlo de manera organizada favorece su apropiación y que debido a la multiplicidad de instrumentos desplazamiento, dicha introducción debe tener en cuenta y considerar varios usos de éste.

Nuestros primeros resultados nos permiten concluir por un lado, que la medida sigue siendo muy importante para los alumnos y que representa una gran dificultad para ellos, en particular a esta edad (11-12 años), entender como utilizar eficazmente la geometría dinámica. Por otro lado, pudimos observar que los alumnos aprendieron a utilizar el desplazamiento de manera espontánea, pero que sin embargo, sigue siendo problemático y difícil interpretar sus efectos y decidir sobre la validez de una construcción.

El estudio de los esquemas, en particular de los conceptos-en-acto y teoremas-en-acto, nos permiten entender mejor la forma en la que los alumnos usan, ven y entienden el desplazamiento, y también los conocimientos y los conceptos matemáticos sobre los cuales reposan. Algunos de los esquemas que identificamos a partir de las acciones de los alumnos vienen de sus conocimientos y de su experiencia en papel y lápiz; en el “esquema del lápiz”, por ejemplo, para trazar un segmento, los alumnos hacen clic en un punto y llevan el Mouse lentamente hasta el segundo punto, como si la punta del lápiz dejara una traza al pasar. Dicho esquema lo pudimos observar no solo en alumnos de 11-12 años, sino también en adultos con un cierto nivel de experiencia en Cabri-géomètre. La acomodación y adaptación de esquemas ya construidos en papel y lápiz a la geometría dinámica es una parte esencial en el proceso de instrumentación de los alumnos.

Como dice Artigue (2002), génesis instrumental y conocimientos matemáticos no deben ser separados pues se construyen simultáneamente. Diferentes usos del desplazamiento permiten la evolución de los conocimientos matemáticos de los alumnos. En “un auto sin rueda”, el desplazamiento motiva la evolución de las estrategias de construcción hacia la caracterización geométrica de la rueda. En otros problemas hemos visto que, por ejemplo, el desplazamiento puede crear el problema matemático que se busca a resolver.

## BIBLIOGRAFÍA

- Acosta, M.** (2008). Démarche expérimentale, validation et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie. Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble et l'Université de Genève,
- Artigue, M.** (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. In International Journal of Computers for Mathematical Learning 7, 245–274.
- Arzarello, F.; Olivero, F.; Paola, D.; Robutti, O.** (2002). *A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments*. In Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34 (3), 66-72.
- Balacheff, N.; Soury-Lavergne, S.** (1996). *Explication et préceptoat, à propos d'une étude de cas dans Télécabri*. In M. Joab, Actes des Journées Explication '96, 343-356.
- Bellemain, F.; Capponi, B.** (1992). Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. In Educational Studies in Mathematics 23, 59-97.
- Brousseau, G.** (1998). *Théories des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

**Healy, L.** (2000). *Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions*. In Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Hiroshima: Tadao Nakahara, Masataka Koyama, 1, 103-117.

**Olivero, F.** (2002). The proving process within a dynamic geometry environment. PhD Thesis. University of Bristol.

**Rabardel, P.** (1995). Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand-Collin.

**Rolet, C.** (1996). Dessin et figure en géométrie: analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre. Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon.

**Tapan, S.** (2006). Différents types de savoirs mis en oeuvre dans la formation initiale des enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique. Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

**Trouche, L.** (2003). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Montpellier: Edition de l'IREM.

**Vergnaud, G.** (1990). *La théorie des champs conceptuels*. In Recherches en Didactique des Mathématiques, 10/2.3, 133-170.