ESTUDIO DE CLASE: GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS Y OTRAS RELACIONES DE LOS TRIÁNGULOS MEDIADOS POR CABRI

(1) Eduardo Polanía Ramírez – (2) Eugenio Therán – (3) José Danilo Agudelo

(1) Kalao1960@hotmail.com – (2) etheran2000@yahoo.com.mx –

(3) jdagudelo801@hotmail.com

(1) Institución Educativa Juan Bautista La Salle – (2) Normal Superior de Corozal –

(3) Normal Nacional de Granada. COLOMBIA

RESUMEN

Debido a la incorporación del software Cabri Géomètre a nuestras instituciones desde el año 2001 y la metodología Estudio de Clase en el año 2004, hemos implementado dos estudios de clase a nivel nacional, que han contribuido en aspectos como, la integración de la comunidad académica local, departamental y nacional, el compartir de saberes mediante trabajo cooperativo de docentes y estudiantes, la articulación de los proyectos de índole nacional "Incorporación de tecnologías al currículo de matemáticas en Colombia y la metodología Estudio de clase, como resultado del convenio entre el Ministerio de Educación Nacional de Colombia y la Agencia de Cooperación Internacional del Japón" y por supuesto en la calidad del aprendizaje del pensamiento espacial y los sistemas geométricos. La conferencia se desarrolla alrededor de dos aspectos, el primero se refiere a describir brevemente lo expuesto en Iberocari 2006 sobre el Estudio de clase "Maloca Coreguaje una identidad cultural mediada con software Cabri Géomètre" mostrar las fortalezas, avances y proyecciones hacia año 2010, el segundo, compartir con ayuda de evidencias audiovisuales el recorrido del estudio de clase "Generalización del teorema de Pitágoras y otras relaciones en los triángulos", que empezó en el año 2002 en Corozal, Sucre y se materializó el 1 y 2 de noviembre de 2007 con la clase demostrativa, en Florencia, Caquetá, con la participación de 12 instituciones educativas del país.

INTRODUCCIÓN

El Teorema de Pitágoras, de mucha trascendencia en la matemática euclidiana, en especial, para la resolución de problemas de agrimensura, topografía, astronomía, física, ingeniería y de la matemática escolar misma, cobra vital importancia en la Geometría Analítica para determinar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuando se conocen sus dos catetos o, hallar un cateto, cuando se conocen su hipotenusa y el otro. Es una de las relaciones más famosas y creativas en la historia de las matemáticas. El matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927 *The Pitagoream Proposition*. En ese mismo libro, Loomis clasificaría las demostraciones en cuatro grandes grupos: las **algebraicas**, donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo; **geométricas**, en las que se realizan comparaciones de áreas; **dinámicas** a través de las propiedades de fuerza, masa; y las **cuaterniónicas**, mediante el uso de vectores.

Con el estudio de clase, se pretende indagar como los estudiantes pueden construir conocimiento matemático mediado con la tecnología de la calculadora TI-92 plus o Voyage 200, el software Cabri Géomètre, específicamente mirar como es el abordaje de la relación pitagórica desde distintos sistemas de representación y la posibilidad de generalizar la misma para polígonos regulares y no regulares y otras relaciones en triángulos rectángulos desde las competencias matemáticas.

ANTECEDENTES

Dentro del marco del proyecto **"Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica y media de Colombia",** en su fase de expansión y profundización, *La Institución Educativa Escuela Normal Superior de Corozal*, presenta un reporte de la experiencia de aula "***Generalización del Teorema de Pitágoras***" en agosto del 2003, desarrollada con un grupo de 12 estudiantes de los grados décimos mediados con las calculadoras graficadoras y algebraicas, posteriormente en el año 2005 se grabó un documental para el programa las Rutas del Saber "Pitágoras en Corozal", donde se presenta un registro audiovisual de la experiencia.

También hay un reporte de la experiencia en la Institución Educativa Escuela Normal Superior María Auxiliadora, Granada, Meta, "Generalización del teorema de Pitágoras, formas de intervención en el aula", es parte de una propuesta de enseñanza aprendizaje explorada en el aula de clases con estudiantes de noveno grado entre los 14 y 16 años, ligada a una visión del aprendizaje de las matemáticas en el que la exploración, la creación, la formulación de conjeturas, la validación, la sistematización la comunicación y la argumentación juegan un papel importante y en el que las nuevas tecnologías se convierten en un laboratorio de experimentación, resultado de la experiencia en el proceso de incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de la matemática. La experiencia se llevo a cabo durante un periodo de 16 horas. Aquí abordamos posibilidades de construcción de un triángulo rectángulo y la construcción de polígonos semejantes en cada uno de sus tres lados, aprovechando las diferentes opciones exploradas por los estudiantes, como una forma de visualización del entorno de aprendizaje, y proponiendo algunas estrategias de organización y profundización que nos permitieran abordar otros campos de la matemática a partir del concepto y la construcción del triángulo rectángulo y polígonos semejantes en cada uno de sus lados.

El 10 de abril año 2007 dentro del plan de preparación de las pruebas de estado en la Institución Educativa Juan Bautista La Salle de Florencia, se aplica la prueba escrita "Otra mirada al Teorema de Pitágoras" con el objetivo de evaluar la generalización del Teorema desde las competencias matemáticas.

Una fase importante de consolidación del estudio de clase, se realizó el 1 y 2 de Noviembre de 2007 en Florencia, Caquetá, donde se propuso y desarrolló el segundo encuentro nacional de clase demostrativa dentro del marco del Estudio de clase "Generalización del Teorema de Pitágoras y otras relaciones en los triángulos" .En el presente año se está desarrollando la fase de socialización, con estudiantes de las instituciones que participaron en el estudio de Clase, inicialmente se abordó la construcción de árboles pitagóricos del Tipo I y del Tipo II con software cabri géomètre.

CLASE DEMOSTRATIVA

Un elemento fundamental de un estudio de clase, es la clase demostrativa, generalmente abierta a la comunidad académica y cuyo objeto es la de validar la lección propuesta por el equipo de docentes que realizan la investigación de una problemática de los pensamientos matemáticos, como en nuestro caso "Generalización del Teorema de Pitágoras y otras relaciones en los triángulos" y cumple con seis fases:

Fase 1: Presentación, introducción y protocolos, Fase 2: Desarrollo de la situación problema por los estudiantes, Fase 3: Comentario del experto invitado, implicaciones didácticas de la clase demostrativa, Fase 4: Reflexión de la clase propuesta por parte de la comunidad académica, Fase 5: Validación de la clase demostrativa, mediante formatos dispuestos para tal fin, Fase 6: Conclusiones.

A continuación de describe el desarrollo de la fase 2.

OBJETIVO GENERAL

Estimular el desarrollo de las habilidades y competencias matemáticas, mediante el trabajo cooperativo entre estudiantes de diferentes regiones del país, desarrollada a través de la metodología Estudio de clase, consolidada con la ejecución de la clase demostrativa “Generalización del Teorema de Pitágoras y otras relaciones en triángulos rectángulos”.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Construir polígonos regulares sobre los lados de un triángulo rectángulo utilizando las potencialidades del programa Cabri Géomètre.

Explorar el teorema de Pitágoras, con polígonos regulares e irregulares sobre cada uno de los lados de un triangulo rectángulo para determinar las relaciones entre las áreas de estos polígonos.

Explorar la relación entre el área del cuadrado mayor y la suma de las áreas de los cuadrados pequeños construidos sobre un triangulo rectángulo a través de representaciones graficas, tabulares y algebraicas.

Encontrar otras relaciones de triángulos rectángulos en los árboles Pitagóricos del Tipo I y del Tipo II

REQUERIMIENTOS PREVIOS

De orden geométrico

- Tener conocimientos generales de geometría.
- Algunas demostraciones algebraicas del teorema de Pitágoras.
- Construcción de Macros cuadrado, Macro Triángulo rectángulo, Macro semicírculo.
- Función lineal y cuadrática. Parámetros de una función lineal. Gráficas

De orden Tecnológico

- Manejo del Software Cabri Géomètre para computador y para la calculadora Voyage 200.

DESEMPEÑOS QUE SE ESPERAN

- Argumentar sobre propiedades matemáticas a partir de los recursos que brindan los instrumentos computacionales: calculadora, computadora.
- Escribir lo que está sucediendo en la situación de cambio, identificando las variables y la relación que existe entre ellas, al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones.
- Desarrollar procedimientos matemáticos en forma versátil y óptima aprovechando la opción que ofrece la calculadora para generar fluidez algorítmica.
- Conectar ideas matemáticas, haciendo uso de registros de representación.
- Explorar situaciones matemáticas en busca de estrategias de resolución de problemas.
- Ampliar sus imágenes conceptuales acerca de objetos y procesos matemáticos aprovechando la mediación instrumental.
- Sustentar los resultados obtenidos a la con el ánimo de ser validados o retroalimentados.

PAPEL DE LA TECNOLOGÍA

Utilizando las potencialidades de los instrumentos computacionales y el software Cabri Géomètre se pretende indagar y explorar la relación pitagórica usando polígonos regulares e irregulares abordándolo desde distintos sistemas de representación como lo es el tabular, gráfico y algebraico. La incorporación de la tecnología amplifica y reorganiza el aprendizaje por cuanto la mirada ya no se centra en el análisis algebraico y geométrico, sino, en como podemos trascender a otras representaciones y de que manera se relacionan las variables involucradas en la situación planteada.

El papel de las tecnologías computacionales en la interacción entre los estudiantes potencia el trabajo colaborativo y cooperativo, donde la puesta en común, la argumentación se ven favorecidas apuntando al desarrollo de competencias comunicativas y de las habilidades matemáticas en los estudiantes.

METODOLOGÍA

- Conformación de equipos de tres estudiantes de diferentes instituciones educativas.
- En cada equipo se dispone de los siguientes instrumentos computacionales:
  Computador y calculadora gráfica con software Cabri Géomètre
  Regla, compás, lápiz, regla, goniómetro, formato de registro de las respuestas.
- Resolver cuatro problemas, algunos con apoyo de tecnología (computacional y convencional) y en otros resuelvan de acuerdo con la competencia. En éste tipo de problemas no se deben usar instrumentos computacionales.
- Los equipos deben resolver simultáneamente el mismo problema.
- Para cada problema propuesto tienen 12 minutos en promedio para su resolución, respondan los interrogantes planteados en cada situación, realicen un registro escrito de la solución. Una vez culminada esta etapa se hace una puesta en común a nivel general, para la cual disponen de 12 minutos, en donde se presentan y comparan las conclusiones de los diferentes equipos en torno a sus propias resoluciones, y también expresen las dificultades y avances.

MOMENTOS O FASES DE GESTIÓN DE LA SITUACIÓN EN EL AULA

- Presentación y comprensión de la situación problemática a abordar.
- Aclaración de dudas,
- Exploración con la calculadora, computador.
- Identificación y simbolización de invarianzas.
- Establecimiento de conclusiones y socialización.

SUGERENCIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

- Lea el problema hasta que lo comprenda. Para ello con frecuencia es útil dibujar diagramas si es posible y utilizar recursos de situaciones parecidas previamente estudiadas, en especial construcciones geométricas.
- Determine los objetos geométricos, las variables conocidas y desconocidas.
- Utilice un símbolo para las variables dependiente e independiente.

- Registre las relaciones de los objetos geométricos que aparezcan en la construcción.
- Escriba una conclusión, la cual responda a las preguntas del problema.

SITUACIONES PROBLEMICAS

CONSTRUCCIÓN DE UN ÁRBOL PITAGÓRICO DEL TIPO I

El término fractal fue incorporado por Benoît Mandelbrot, en 1975, para describir las formas complejas de la naturaleza, ya que con la sola ayuda de la geometría euclidiana, no se pueden explicar algunas formas tales como: ramificaciones arbóreas, rocas, montañas, nubes, sistema neuronal etc. Entre las ramificaciones arbóreas tenemos una clase de fractales llamados “árboles pitagóricos”, cuya construcción se realiza aplicando el teorema de Pitágoras repitiéndose indefinidamente.

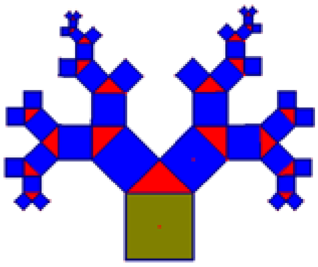


Figura 1.
Árbol pitagórico isósceles rectángulo. Tipo I

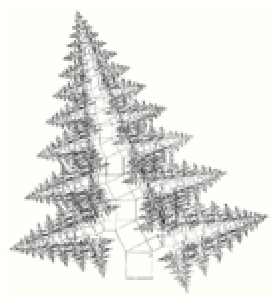


Figura 2.
Árbol pitagórico escaleno rectángulo. Tipo II

Enunciado de la situación

Reproducir virtualmente el árbol pitagórico de la figura 3, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de la figura, cuando sea modificada por arrastre y determine la expresión algebraica para la hipotenusa de uno cualquiera de los triángulos isósceles rectángulo.

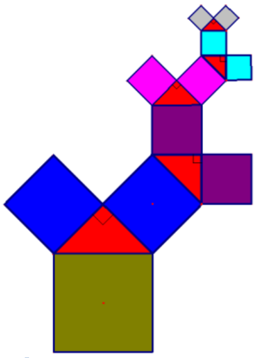


Figura 3. Árbol pitagórico del Tipo I

Previsión de posibles resultados, comportamientos u obstáculos

Recomendaciones para la construcción

Identifique los objetos geométricos que componen el árbol pitagórico TIPO I.

Construya un cuadrado mayor de lado 5 *cms* que sirva de nodo o base del árbol.

Construya un triángulo isósceles rectángulo con hipotenusa a uno de los lados del cuadrado.

Automatice la macro CUADRADO sobre cada cateto del triángulo isósceles rectángulo.

Automatice la macro TRIAREC2 sobre el cuadrado resultante.

Repita el procedimiento, aplicando las macro CUADRADO y TRIAREC2. Complete la construcción.

Mida y registre en una matriz las hipotenusas resultantes de los triángulos isósceles rectángulo.

Preguntas orientadoras

¿Qué relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3? ¿Y entre la longitud hipotenusa 2 y la hipotenusa 4?

¿Cómo calcula la longitud de la primera hipotenusa? ¿y, el cálculo de la tercera hipotenusa?

¿Puede predecir sin hacer cálculos, la longitud de la hipotenusa del séptimo triángulo isósceles?

¿Cuál es la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los catetos y la hipotenusa de cada triángulo isósceles rectángulo?

Explore otras expresiones algebraicas que le permitan calcular las longitudes de las hipotenusas?

Árbol pitagórico del Tipo II "LA SILLA DE LA NOVIA"

Euclides de Alejandría (Siglo III a. c), autor del libro los Elementos, tratado de geometría y de teoría de números, que durante muchos años sirvieron de modelo para el razonamiento lógico.

Los Elementos divididos en trece libros o capítulos, seis de ellos dedicados a la Geometría plana, tres sobre Teoría de Números, tres a la geometría de los sólidos y un libro sobre los números inconmensurables. El libro I, concluye en las proposiciones 47 y 48 con las demostraciones del Teorema de Pitágoras y su recíproco, Euclides utilizó una bella demostración que se ha descrito a veces como un "Molino de viento", o una "Cola de pavo real" o bien como "La Silla de la novia".

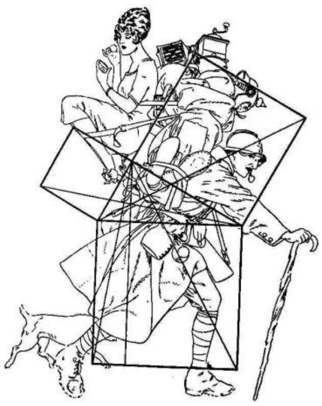


Figura 4. "La Silla de la Novia" en el contexto de la primera guerra mundial

Si el área del cuadrado que soporta "La Silla de la Novia" es la mitad del área del cuadrado donde el soldado lleva su equipo de campaña, entonces el área del cuadrado que debe soportar el sistema "Novia _ Equipo" es:

A. La mitad del área del cuadrado que ocupa el equipo de campaña.
B. El doble del área del cuadrado que ocupa el equipo de campaña.
C. El triple del área del cuadrado que soporta la "Silla de la novia".
D. La tercera parte del área del cuadrado que soporta la "Silla de la novia".

RELACIONES ENTRE LAS FIGURAS PLANAS SEMEJANTES Y EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Construya semicírculos sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo CAB y, encuentra la relación que existe entre el área del semicírculo mayor y la suma de las áreas de los semicírculos menores.

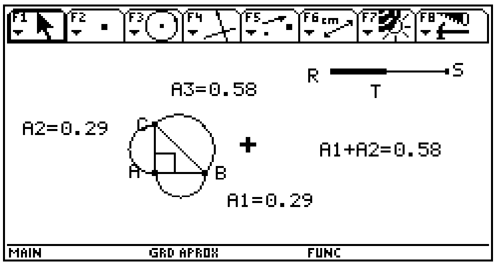


Figura 5

Recomendaciones para la construcción

- Construya un triángulo rectángulo CAB cuyo forma dependa de la variación de un punto T sobre el segmento $\overline{RS}$
- Aplique la macro Semicírculo, sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo.
- Mida el área de cada semicírculo.

Preguntas para la exploración

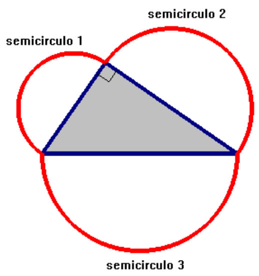
Mueve el punto T sobre el segmento $\overline{RS}$ y escribe tus conclusiones.

¿Qué relación existe entre las áreas del semicírculo mayor y la suma de las áreas de los semicírculos menores?

Pregunta para la competencia[1]

El triángulo sombreado que aparece en la figura 6, es rectángulo. Sobre los lados de este triángulo se han construido figuras planas semejantes.

[1] Tomado de las pruebas Icfes. 2006-2.



Si las áreas de los semicírculos 1 y 2 son respectivamente $\frac{9}{2}\cdot\pi\cdot cm^2$ y $8\cdot\pi\cdot cm^2$, ¿Cuál es el diámetro del semicírculo 3?

A. 6 cms B. 8 cms C. 9 cms D. 10 cms

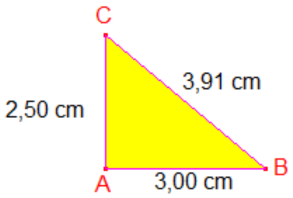
EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y LOS POLÍGONOS IRREGULARES

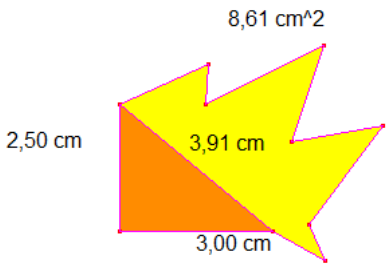
Enunciado de la situación

Dado el triángulo rectángulo ABC, donde su hipotenusa tiene una medida dada, al igual que cada uno de sus catetos, construya un polígono irregular sobre su hipotenusa y demuestre que si se construyen sobre los catetos polígonos irregulares semejantes al construido sobre la hipotenusa se verifica el Teorema de Pitágoras.

Recomendaciones

Se construye sobre la hipotenusa, un polígono cualquiera como el de la figura 1.





Construya sobre los catetos, polígonos semejantes al construido sobre la hipotenusa.
Buscamos el módulo entre la hipotenusa y los catetos que nos permita realizar la homotecia, y a partir de esto construimos los polígonos semejantes.
Determine el área de cada uno de los polígonos construidos, sobre los catetos.
Relacione las áreas de los tres polígonos construidos.

¿Qué pueden concluir?

REPORTE ESCRITO DE ESTUDIANTE

Se presentarán en el desarrollo de la conferencia algunos registros audiovisuales de los planteamientos, técnicas y soluciones dadas a las situaciones planteadas por los estudiantes participantes.

REFLEXIÓN DE LA CLASE

Se presentarán en la conferencia algunos registros audiovisuales de los planteamientos por los docentes observadores, sobre el desarrollo de la clase demostrativa.

CONCLUSIONES

Algunas conclusiones de los docentes observadores de la clase demostrativa:

- Albeiro Jiménez León. Institución Educativa Normal nacional Superior de Florencia.
- "Hay un tema de discusión que es la generalización del teorema de Pitágoras, un punto principal, que es la comprobación del teorema a partir de la tecnología computacional"
- Beatriz Vera Díaz. Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán
- "La experiencia me generó muchas inquietudes, especialmente como docente prepararme para mejorar e incluir en mi práctica pedagógica la tecnología, me parece valioso permitir que el estudiante descubra por si sólo y con el trabajo en equipo las respuestas a las preguntas propuestas"
- Alcibíades Blanco. Colegio la Asunción – Manizales
- "La clase desarrollada enseña una forma de llevar a cabo el proceso de enseñanza. Sin embargo reduce las condiciones de grupo, aparte de simplificar el contexto. Los temas analizados requieren de unos tiempos mayores en los momentos especificados"
- Orlando Cardozo Scarpeta. Institución Educativa Rufino Quichoya-El Doncello

- “El estudio de clase visto muestra otra faceta del desarrollo de las clases de matemáticas de manera creativa, dinámica, en la cual el estudiante expresa gran entusiasmo en participar dando lo mejor de si”
- Blanca Libia García Montes. Institución Educativa Gabriela Mistral
- “Muy buena la aplicación de la tecnología en el aula de clase pero nos faltan las ayudas (Computador, calculadora), esperamos se doten las instituciones para poder implementar lo aprendido”

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Barnett, R. (1991). Geometría. McGraw-Hill.

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza.

García, J.; Beltrán, C. (1996) *Geometría y Experiencias*. Longman de México Editores.

Hitoshi Arai (2005). *Sobre la composición de la clase de matemáticas*. Improvement of the Teachers training System on the Natural Science and Mathematics. Japan International Cooperation Agency.

M.E.N. (1990). *Matemáticas, lineamientos curriculares.* Cooperativa editorial Magisterio. Bogota.

M.E.N. (2002). *Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes. Bogotá.

Moise – Downs (1986). *Geometría Moderna.* Addison – Wesley Iberoamericana.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana

Takahashi, A.; Watanabe, T.; Yoshida, M. (1989). *Lower Secondary School Teaching Guide For the Japanese Course of Study: Mathematics(Grades 7-9).* Global Education Resources, 2006. Traducción de la guía de orientación para la enseñanza en la escuela secundaria. Ministerio de Educación Japonés.