CARACTERIZAÇÕES DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS COM CABRI

(1) Guillermo Antonio Lobos Villagra – (2) Ivo Machado da Costa

(1) lobos@dm.ufscar.br – (2) ivo@dm.ufscar.br

Universidade Federal de São Carlos. BRASIL

RESUMO

Uma vez que a relação de Pitágoras, a^2 = b^2 + c^2, esteja satisfeita por um triângulo qualquer de lados a, b, e c, isto o caracteriza como sendo um triângulo retângulo, ou seja, o teorema de Pitágoras que é o mais famoso teorema de geometria euclidiana plana e o seu recíproco caracterizam os triângulos retângulos. Que outras caracterizações de triângulos retângulos são conhecidas? Uma resposta a esta pergunta pode ser bastante extensa. Não existe na literatura uma resposta completa a esta pergunta. Desde a antiguidade têm sido dadas respostas para essa pergunta. Portanto, neste trabalho apresentamos algumas dessas caracterizações dos triângulos retângulos com suas respectivas demonstrações, que em geral espera-se que um professor de Matemática as conheça o que nem sempre acontece no Brasil, já que na atualidade os livros didáticos Brasileiros de geometria euclidiana plana trazem muito pouco sobre o assunto. Finalmente, o software de geometria dinâmica conhecido como Cabri-Géomètre II foi utilizado neste trabalho como uma ferramenta auxiliar muito útil na visualização e construção das figuras, e na pesquisa de novas caracterizações de triângulos retângulos aqui presentes.

INTRODUÇÃO

Os professores de ensino superior formados em Matemática e aqueles que atuam no ensino médio sabem o enunciado do Teorema de Pitágoras bem como seus estudantes. Além disso, conhecem o recíproco do Teorema de Pitágoras. Mas, de um modo geral, não sabem que o Teorema de Pitágoras, entre outras coisas, é equivalente ao axioma das paralelas (axioma de Playfair: "*por um ponto fora de uma reta dada passa uma única reta paralela*"). Recordemos o enunciado do Teorema de Pitágoras e o seu recíproco.

<u>Teorema 1:</u> Um triângulo é retângulo se, e somente se, o quadrado do comprimento do lado maior do triângulo (hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos comprimentos de cada um dos outros dois lados do triângulo (catetos).

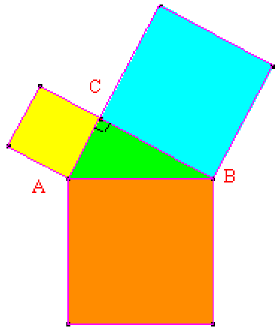

Figura 1

Ou seja, se vale a relação de Pitágoras entre os lados de um triângulo qualquer esse triângulo terá um ângulo interno de noventa graus, ou seja, será um triângulo retângulo. Portanto, a relação de Pitágoras caracteriza os triângulos retângulos, mas isto todos sabem. Também sabem que no contexto da geometria euclidiana, se a soma de dois ângulos internos de um dado triângulo é igual a noventa graus, então necessariamente esse triângulo é retângulo (salientamos que isto não acontece no contexto de outras geometrias, por exemplo, na geometria esférica ou na geometria hiperbólica, teremos que o terceiro ângulo do triângulo será respectivamente maior ou menor que noventa graus).

A pergunta que surge é a seguinte: Um professor recém formado nos tradicionais cursos de licenciatura ou bacharelado em matemática, ou um aluno que acabou de sair do ensino médio, ou até mesmo um aluno que acabou de concluir estágio de iniciação científica por ter sido premiado nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP conhece alguma outra caracterização de um triângulo retângulo?

Eventualmente uma resposta considerada mais elaborada e que aparece, com freqüência em alguns casos é aquela que pode ser resumida no seguinte teorema:

<u>Teorema 2</u>: Um triângulo é retângulo se, e somente se, pode ser inscrito numa circunferência (ou semicircunferência) de diâmetro igual ao comprimento de um dos lados do triângulo.

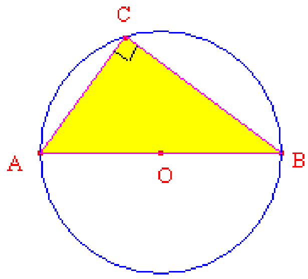

Figura 2

O teorema acima nos diz que o lugar geométrico de todos os pontos C do plano que formam um triângulo retângulo em *C* com *A* e *B* pontos distintos e fixos é a circunferência de centro o ponto médio *O* do segmento *AB* exceto os pontos *A* e *B*. Outra caracterização de triângulos retângulos segue como conseqüência direta do Teorema 2 no seguinte resultado:

<u>Corolário 1</u>: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o circuncentro O do triângulo (centro da circunferência inscrita ao triângulo) está sobre um dos lados do triângulo.

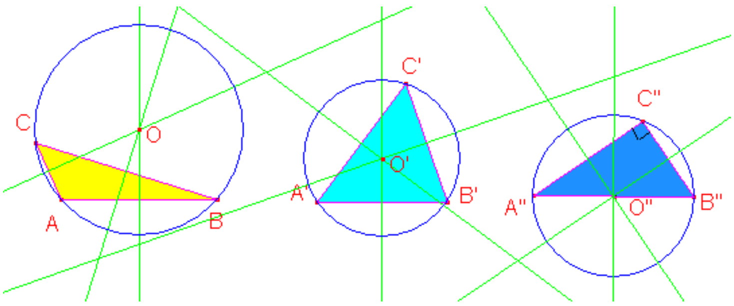

Figura 3

Observar que o circuncentro de um triângulo qualquer, em particular na figura 3, é o ponto de encontro das mediatrizes (retas perpendiculares aos lados do triângulo nos pontos médios). Quando um triângulo é obtusângulo (isto é, possui um ângulo interno obtuso, ou seja, maior que noventa graus) o seu circuncentro está sempre fora da região triangular determinada pelo triângulo, e quando um triângulo for acutângulo (isto é, o triângulo possui todos seus ângulos internos agudos, ou seja, menores que noventa graus) acontece que o seu circuncentro é sempre interno à região triangular determinada por ele.

Outra formulação que notamos ser de conhecimento de algum dos alunos que concluíram o estágio da OBMEP no interior de São Paulo é a seguinte:

Teorema 3: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o ortocentro H do triângulo (ponto de encontro das retas que contem as alturas de um triângulo) é um dos vértices do triângulo.

Demonstração: A prova direta é obvia, mas vejamos como ficaria uma prova por absurdo. Com efeito, suponhamos que o triângulo não seja um triângulo retângulo, temos dois casos a considerar. *Caso 1*: O triângulo é obtusângulo - conseqüentemente o lado oposto ao ângulo interno obtuso será maior que os outros dois lados do triângulo - podemos assim construir o círculo de diâmetro esse lado maior, e a seguir traçar as alturas do triângulo e observe que o ortocentro fica fora desse círculo e dos outros dois círculos de diâmetro os outros dois lados do triângulo, portanto não podendo ser um vértice do triângulo. Absurdo! *Caso 2*: se o triângulo for acutângulo podemos construir os três círculos com diâmetro cada um dos lados e observar que o ortocentro fica sempre interno a de cada um dos círculos e, portanto novamente não poderá ser um vértice do triângulo.

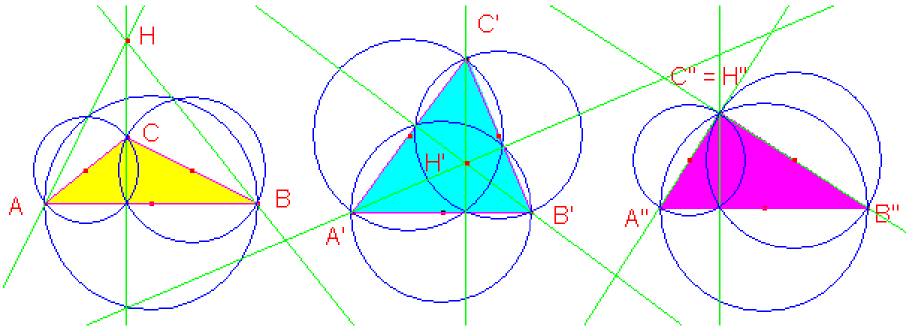

Figura 4

Na figura 4 podemos observar que o ortocentro num triângulo retângulo é o ponto de interseção das três circunferências cujos diâmetros são os lados do triângulo. Também observamos que o Corolário 1 e o Teorema 3 nos permitem fazer as seguintes perguntas às quais sendo positivamente respondidas poderiam constituir-se em questões para os alunos de olimpíadas de matemática, e que os estudantes de licenciatura não levam em conta e nem os estudantes de ensino médio:

Problema 1: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o seu baricentro G (encontro das medianas de um triângulo) verifica que propriedade?

Problema 2: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o seu incentro I (centro da circunferência inscrita ao triângulo) verifica que propriedade?

Algumas respostas em esta direção serão dadas a seguir, destacando que vários dos enunciados dos teoremas que passamos a apresentar foram enunciados como problemas em [Rosado]:

Teorema 4: **[**Izard**]** Um triângulo ABC é retângulo se, e somente se, o incentro I do triângulo verifica a seguinte relação BI*FI = BF*AI, onde F é o pé da bissetriz do ângulo C.

Demonstração: Use o Cabri para verificar que dado um triângulo retângulo o seu incentro verifica a relação expressa no enunciado do teorema. A recíproca segue, pelo teorema do ângulo externo aplicada ao triângulo *BIF* e do fato que *I* é o encontro das bissetrizes, temos que $\angle BIF = \angle IBC + \angle BCI = ½*\angle ABC + ½*\angle BCA = ½*(180^o - \angle BAC) = 90^o - \angle BAI$. De $BI*FI = BF*AI$ e $\angle ABI = \angle IBF$, e do critério de semelhança de triângulos, temos que os triângulos *ABI* e *IBF* são semelhantes. Logo, $\angle BAI = \angle BIF = 90^o - \angle BAI$. Portanto, $\angle BAC = 2\angle BAI = 90^o$. □

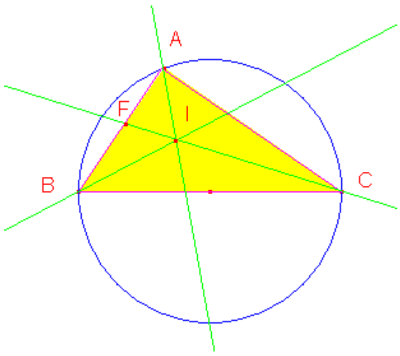

Figura 5

Teorema 5: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o baricentro G do triângulo verifica a seguinte relação GO = R/3, onde O é circuncentro e R é o circunraio (raio da circunferência circunscrita ao triângulo).

Demonstração: Suponhamos que o triângulo é retângulo, logo pelo Corolário 1, o circuncentro O está sobre a hipotenusa do triângulo e portanto coincide com o ponto médio dela. Neste caso a mediana relativa ao ângulo reto corresponde ao circunraio R.

Assim, pelo fato do baricentro dividir cada uma das medianas na proporção de 1:3, temos GO = R/3. A recíproca pode ser ilustrada usando o Cabri. □

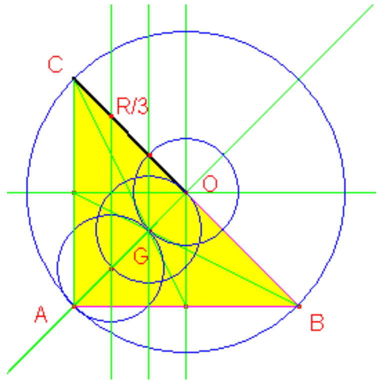

Figura 6

Agora podemos propor o problema geral.

Problema 3: Dado um triângulo qualquer. Determine que propriedades os elementos do triângulo devem verificar a fim de caracterizá-lo como triângulo retângulo.

OUTRAS CARACTERIZAÇÕES DOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS:

Nesta seção daremos algumas respostas para o problema 3 as quais acreditamos que possam contribuir com os professores de matemática em suas aulas, com os alunos de pós-graduação em ensino de matemática como temas de pesquisa de novas metodologias de ensino de geometria uma vez que no Brasil, a geometria como disciplina no ensino médio na maioria das cidades esta sendo retirada da grade curricular de ensino, o mesmo para os alunos de graduação em Matemática e alunos de ensino médio e para a os alunos de iniciação científica da OBMEP.

O fato do raio de uma circunferência ser sempre perpendicular a qualquer reta tangente no ponto de tangência (veja em [Barbosa] as Proposições 8.2 e 8.3 p. 129) permite apresentar a seguinte caracterização de triângulo retângulo, cuja demonstração é simples:

Teorema 6**:** Um triângulo é retângulo se, e somente se, um dos lados do triângulo é tangente num vértice à circunferência de diâmetro o lado adjacente.

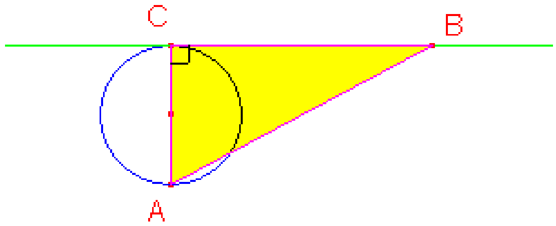

Figura 7

A seguinte caracterização pode ser construída traçando retas paralelas como mostra a figura abaixo

Teorema 7: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o seu pedal complementar (triângulo formado pelos pontos médios do triângulo) é um triângulo retângulo.

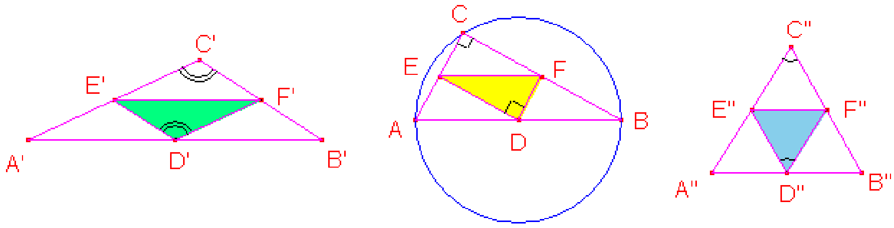

Figura 8

Demonstração: Pelo Teorema de Tales temos que os 5 triângulos na figura abaixo são semelhantes, logo seus ângulos correspondentes são congruentes e conseqüentemente se o triângulo maior é retângulo isto equivale a dizer que o pedal complementar é retângulo. □

Em [Barbosa] há duas propriedades algébricas que um triângulo retângulo necessariamente satisfaz (veja Proposição 7.4 e Problema 12 do Capítulo 7 de [Barbosa]) e que na verdade veremos que caracterizam, univocamente, triângulos retângulos.

Teorema 8: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o comprimento h da altura relativa a um vértice que divide o lado oposto a esse vértice em dois segmentos não nulos de comprimentos m e n, é a média geométrica entre m e n, ou seja, h = sqrt(m*n).

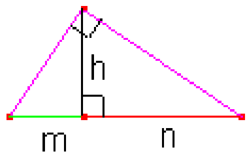

Figura 9

Demonstração: Se o triângulo é retângulo use o Cabri para verificar que a condição dada no teorema está satisfeita. Suponhamos que *a*,*b* e *c* sejam os comprimentos dos lados de um triângulo qualquer, que *h* seja altura relativa ao lado *c* = *m* +*n*. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado aos dois triângulos determinados por *h*, tem-se que: *a*^2 = *h*^2 + *m*^2 e *b*^2 = *h*^2 + *n*^2, logo *a*^2 + *b*^2 = *m*^2 + 2**h*^2 + *n*^2 = (*m* + *n*)^2 = *c*^2 , agora pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, segue-se que o triângulo é retângulo. □

<u>Teorema 9</u>: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o recíproco do quadrado do comprimento h de uma altura relativa a um dos vértices que divide o lado oposto em dois segmentos não nulos m e n é igual à soma dos recíprocos dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados do triângulo tendo o referido vértice como ponto comum.

Demonstração: Suponhamos que *a, b* e *c* sejam os comprimentos dos lados de um triângulo qualquer, que *h* seja altura relativa ao lado de comprimento *c* = *m* +*n*. Então basta provar que a relação 1/*h*^2 = 1/*a*^2 + 1/*b*^2 é equivalente a *h*^2 = *m***n* e usar o teorema anterior. □

<u>Teorema 10</u>: Um triângulo ABC é retângulo em C se, e somente se, sua circunferência inscrita é tangente ao lado AB em D satisfaz a seguinte relação AC*CB = 2*AD*DB.

Demonstração: Seja *D* em *AB* o ponto de tangência da circunferência inscrita ao triângulo *ABC* retângulo em *C*. Se denotarmos *AD* = *m* e *DB* = *n*, então *AB* = *m* + *n*, *AC* = *m* + *r* e *BC* = *n* + *r*, onde *r* é o inraio (centro da circunferência inscrita ao triângulo). Do Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo *ABC*, tem-se (*m* + *n*)^2 = (*m* + *r*)^2 + (*n* + *r*)^2. O que é equivalente, após manipulações algébricas a *m***n* = *m***r* + *n***r* + *r*^2 = ½ **AC***BC*. Portanto, 2**AD***DB* = *AC***CB*. Reciprocamente, sejam *D, E* e

F os pontos de tangência relativos aos lados AB, BC e AC, respectivamente. Se I denota o incentro do triângulo ABC, pelo Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos retângulos IFC e IEC, tem-se que $FC = EC$. Denotamos por $AD = m$, $DB = n$ e $EC = x$. Assim pela hipótese, sabemos que $2*m*n = (m + x)*(n + x)$, o que é equivalente a $m*n = m*x + n*x + x^2$, portanto $AC^2 + CB^2 = (m + x)^2 + (n + x)^2 = m^2 + n^2 + 2*(m*x + n*x + x^2) = (m + n)^2 = AB^2$. □

Como conseqüência direta do Teorema 10, temos o seguinte resultado que caracteriza os triângulos retângulos em termos da área do triângulo.

<u>Corolário 2</u>: Um triângulo é retângulo se, e somente se, existe um ponto sobre um dos lados do triângulo tal que a sua área do triângulo é igual ao produto dos comprimentos dos segmentos determinados pelo ponto.

A seguir damos cinco caracterizações de triângulos retângulos em termos dos lados do triângulo.

<u>Teorema 12</u>: Um triângulo é retângulo se, e somente se, os comprimentos a, b e c dos lados do triângulo satisfazem a seguinte relação: $\mathrm{sqrt}(a + b) = \mathrm{sqrt}((a + c)/2) + \mathrm{sqrt}((a - c)/2)$, com $a > c$.

Demonstração: O resultado segue do fato que elevando ao quadrado a relação do enunciado do teorema e fazendo manipulações algébricas, obtêm-se que $b = \mathrm{sqrt}(a^2 – c^2)$ o que é equivalente a relação de Pitágoras. □

<u>Corolário 3</u>: Um triângulo é retângulo se, e somente se, os comprimentos a, b e c dos lados do triângulo satisfazem a seguinte relação: $\mathrm{sqrt}(a - b) = \mathrm{sqrt}((a + c)/2) - \mathrm{sqrt}((a - c)/2)$, com $a > b$ e $a > c$.

<u>Corolário 4</u>: Um triângulo é retângulo se, e somente se, existem números reais p,q com $p > q$, tais que $p^2 – q^2$, $2*p*q$, $p^2 + q^2$ são os comprimentos dos lados do triângulo.

Demonstração: Basta considerar $p= \mathrm{sqrt}((a + c)/2)$ e $q = \mathrm{sqrt}((a - c)/2)$, onde a, b e c são os lados do triângulo com $a > c$. □

Teorema 13: Um triângulo é retângulo se, e somente se, os comprimentos a, b e c dos lados do triângulo satisfazem que: a^3 + b^3 + c^3 = a*b*(a + b) – b*c*(b + c) + c*a*(c + a).

Demonstração: Basta observar que a relação do enunciado do teorema após manipulações algébricas é equivalente a (a^2 – b^2 – c^2)*(a – b – c) = 0 e o resultado segue-se do fato que num triângulo qualquer a – b – c sempre diferente de zero. □

A seguir damos uma caracterização de triângulo retângulo em função dos ângulos internos do triângulo.

Teorema 14: Um triângulo é retângulo se, e somente se, a soma de dois ângulos internos for igual ao terceiro ângulo interno.

Demonstração: Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo qualquer. Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\alpha + \beta = \gamma$, ou que equivale a dizer que $\alpha + \beta + \gamma = 2*\gamma$, ou equivalentemente $\gamma = 90^0$. □

O teorema acima tem as seguintes implicações para uma delas damos uma demonstração:

Corolário 5: Um triângulo isósceles é um triângulo retângulo se, e somente se, os dois ângulos internos iguais medem 45 graus.

Corolário 6: Um triângulo é retângulo se, e somente se, x^3 + y^3 + z^3 + 2*x*z = x^2*(y + z) + y^2*(z + x) + z^2*(x + y), onde x,y,z são números reais não nulos proporcionais aos ângulos internos do respectivo triângulo.

Demonstração: Basta observar que a relação *x*^3 + *y*^3 + *z*^3 + 2*x*z = *x*^2*(*y* + *z*) + *y*^2*(*z* + *x*) + *z*^2*(*x* + *y*) é equivalente após manipulações algébricas a (*x* + *y* + *z*)*(*z* – (*x* + *y*))^2 = 0, o que é equivalente a *z* = *x* + *y*, já que *x* + *y* + *z* é não nulo. Portanto, o resultado segue do Teorema 14. □

Teorema 15: Um triângulo ABC é retângulo em A se, e somente se, qualquer ponto M entre B e C satisfaz a seguinte relação: MA^2*BC^2 = MB^2*AC^2 + MC^2*AB^2.

Demonstração: Seja H o pé da altura relativa ao ângulo reto em A do triângulo ABC. Temos dois casos a considerar que M pertença ao segmento BH ou ao segmento HC. Faremos o caso M pertencente a HC, pois o outro caso é análogo. Seja $x = HM$, $m = BH$, $n = HC$ e $h = AH$. Da semelhança dos triângulos retângulos ABC, HBA, HAC segue que $c*n = h*b$ e $b*m=h*c$. Então $MA^2*BC^2 – MB^2*AC^2 – MC^2*AB^2 = (h^2 + x^2)*a^2 – (m + x)^2*b^2 – (n – x)^2*c^2 = (m^2*n^2 – m^2 – 2*m*x)*b^2 – (m^2*n^2 – n^2 – 2*n*x)*c^2 = h^2*b^2 – h^2*c^2 -2*h*c*x + h^2*c^2 – h^2*b^2 + 2*h*c*x = 0$. Para a recíproca vamos inicialmente mostrar que o pé da altura do vértice A relativa ao lado BC é um ponto H que está entre B e C. Com efeito, podemos supor sem perda de generalidade que B está entre H e C. Denotamos por $h = AH$, $c = AB$, $a = BC$, $b = AC$, e $y = AM$, onde M é ponto médio do segmento BC. A contradição segue do fato que M é circuncentro, ou seja, que $y = a/2$. Para ver isto, basta usar o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AHC, AHM e AHB, e obter as seguintes equações: (i) $h^2 + (x + a)^2 = b^2$; (ii) $h^2 + (x + a/2)^2 = y^2$; (iii) $h^2 + x^2 = c^2$. Logo, de (i)–(ii) resulta (iv) $x*a + 3a^2/4 = b^2 – y^2$ e de (ii)–(iii) resulta (v) $x*a + a^2/4 = y^2 – c^2$, e de (iv)–(v) resulta (vi) $a^2 = 2*(b^2 + c^2) – 4y^2$. Aplicando a hipótese a M resulta a equação (vii) $4y^2 = b^2 + c^2$. Finalmente de (vi) e (vii) obtemos $y = a/2$, absurdo! Como H pertence a BC, podemos aplicar a hipótese no caso $M = H$, obtendo-se $h^2*a^2 = m^2*b^2 + n^2*c^2$. Uma vez que $m^2 + h^2 = c^2$ e $n^2 + h^2 = b^2$, chegamos após algumas manipulações algébricas a que $h^2 = m*n$, logo, o triângulo ABC é retângulo pelo Teorema 8. □

<u>Teorema 16</u>: Um triângulo é retângulo se, e somente se, o semi-perímetro p do triângulo é igual a soma do seu inraio r mais o dobro do circunraio R.

Demonstração: Se o triângulo é retângulo é fácil ver que hipotenusa é igual a $2*R$ e os catetos são $m + r$ e $n + r$, onde $m + n = 2*R$. Reciprocamente, num triângulo qualquer de lados a, b, c a área verifica as seguintes igualdades $A = p*r = a*b*c/(4*R) = \mathrm{sqrt}(p*(p – a)*(p - b)*(p - c))$. Assim a hipótese $p = r + 2*R$ é equivalente a $p = A/p + a*b*c/(2*a)$ que é equivalente a $4*p^4*A^2 – (2*A^2 + p*a*b*c)^2 – p^2*a^2*b^2*c^2 = 0$. Multiplicando-se a última equação por 16 e observando-se que $A^2 = p*x$, onde $x = (p – a)*(p - b)*(p - c)$, obtemos que ela é equivalente a $p^2*(64*p^3*x – 64*x^2 – 64*a*b*c*x – 16*a^2*b^2*c^2) = 0$. Finalmente, após exprimir p e x em função de dos lados do triângulo, obtemos da última equação que

$(a^2 + b^2 - c^2)*(a^2 + c^2 - b^2)*(a^2 - b^2 - c^2)*(a + b + c)^2 = 0$. O que mostra que o triângulo é retângulo usando o recíproco do Teorema de Pitágoras. □

Corolário 7: [Bankoff at al] Um triângulo é retângulo se, e somente se, o comprimento ao quadrado do segmento que une o circuncentro com o incentro somado com a área do triângulo é igual à soma dos quadrados do inraio e do circunraio.

Demonstração: Primeiro observe que num triângulo qualquer as seguintes relações são verdadeiras: (1) $A = p*r$ e (2) $OI^2 = R^2 - 2R*r$ (*relação de Euler*), onde A, p, r, R e OI denotam, respectivamente, a área, o semi-perímetro, o inraio, o circunraio e a distância entre o incentro I e o circuncentro O do triângulo. Assim, $OI^2 + A - r^2 - R^2 = R^2 - 2*R*r + p*r - r^2 - R^2 = r*(p - r - 2*R)$. O resultado segue do teorema anterior. □

Teorema 17: Um triângulo é retângulo se, e somente se, os pontos médios das alturas do triângulo são colineares.

Demonstração: Dado um triângulo retângulo sabemos que os catetos são alturas. Logo, o segmento que liga os pontos médios desses catetos é paralelo à hipotenusa do triângulo, verifique isto com um programa de geometria dinâmica, ou usando semelhança de triângulos. Portanto, podemos concluir que o ponto médio da altura relativa ao ângulo reto está sobre a reta que contem os pontos médios dos catetos. Reciprocamente, suponhamos que o triângulo não é retângulo. Assim temos dois casos. Primeiro vejamos o caso do triângulo ABC ser obtusângulo em C. Trace as alturas AH_A, BH_B, CH_C relativas aos vértices do triângulo e os pontos médios E, D, F respectivamente dos lados BC, AC, AB. A seguir trace a semi-reta EF que será paralela ao lado AC e cortará a altura BH_B no ponto médio P, da mesma forma obtenha os pontos Q e R pontos médios das alturas CH_C e AH_A. Observe que Q é colinear com FD e P está no interior do semi-plano determinado pela reta que passa por F e D e que contem o ponto A. Logo, a reta r_{PQ} que passa por P e Q, por hipótese, contem o ponto R, o qual estará contido no semi-plano oposto a Q e determinado por r_{PQ}. Por outro lado, se traçamos a semi-reta ED obtermos que o ponto R esta do mesmo lado que Q no semi-plano determinado por r_{PQ}. Absurdo! Vejamos agora que acontece se o triângulo for acutângulo, neste caso, construa os pontos os pontos médios E, D, F respectivamente dos lados *BC*, *AC*, *AB* e trace as alturas AH_A, BH_B, CH_C relativas aos vértices do triângulo determinando respectivamente seus pontos médios *P*, *Q* e *R*, os quais são colineares respectivamente com os pontos *F*, *E*; *E*, *D*; e *D*, *F*. Conseqüentemente, estes pontos formam um triângulo. Absurdo! Portanto, o triângulo é retângulo. □

DESAFIOS

Use um programa de geometria dinâmica como o Cabri para verificar se os seguintes enunciados abaixo são válidos ou não?

Enunciado 1: "Um triângulo é retângulo se, e somente se, um dos pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo é colinear com dois dos pontos médios de duas bissetrizes do triângulo".

Enunciado 2: "Um triângulo ABC é retângulo se, e somente se, os pontos D, E que dividem o lado AB em três partes iguais satisfazem a seguinte relação: cotg(∠ACD) + cotg(∠DCE) = 3*cotg(∠ECB), onde cotg( ) denota a cotangente do ângulo respectivo"

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Com este trabalho esperamos chamar a atenção para uma parte da geometria que no momento esta sendo deixada de lado nos currículos do ensino médio e para os professores formados em licenciatura que saem das universidades tem muito pouco conhecimento sobre caracterizações dos triângulos retângulos e das aplicações do Teorema de Pitágoras.

Encorajamos aos professores de matemática a procurar usando os recursos do Cabri ou qualquer outro programa de geometria dinâmica e encontrar outras caracterizações de triângulos retângulos (ou isósceles, eqüiláteros, etc.).

Agradecimentos: O primeiro autor agradece às professoras Maria Aparecida Francisco da Silva e Yuriko Yamamoto Baldin, por permitir-lhe que seja um dos orientadores de alunos iniciação científica da OBMEP. Quero destacar que na OBMEP de 2007 participaram na primeira etapa mais de 17 milhões de estudantes de escolas

publicas do Brasil que selecionou 2 mil alunos de iniciação científica e que no estado de São Paulo, foram em torno de 700 alunos. Agora para 2008 esta previsto a participação de mais de 18 milhões de alunos dos quais somente os 3 mil melhores serão selecionados e poderão vir a ser bolsistas de iniciação científica da OBMEP. Parte destas notas foi apresentado no 2º Encontro de Encerramento do Estágio de Iniciação Científica da OBMEP do interior de São Paulo, Brasil, para os nível 2 e 3.

BIBLIOGRAFIA

Baldin, Y.; Villagra, G. (2007). Atividades com Cabri-Géomètre II para Cursos de Licenciatura em Matemática e Professores do Ensino Fundamental e Médio, EDUFSCar, 2ª reimpressão.

Rosado, F. (2005). *Triângulos especiais, primeira parte*. En Revista Escolar de La Olimpiada Ibeiroamericana de Matemática, No. 17.

Barbosa, J. (2005). *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. SBM.

Izard, R. (1983). *Problem 1132b*. En Mathematics Magazine, vol. 56 No. 1, p. 47-48.

Bankoff, L. (1959). *Problem 33*. En American Mathematical Monthly, vol. 66 No. 9, pp 813.