

APRENDIENDO SOBRE CÓNICAS A PARTIR DE UN DISPOSITIVO DINÁMICO PARA TRAZARLAS

José Luis Soto Munguía

jlsoto@gauss.mat.uson.mx

Universidad de Sonora. MÉXICO

Resumen

En este artículo se discute un instrumento virtual, llamado aquí conicógrafo, que traza cónicas de todos los géneros. El instrumento ha sido diseñado con la ayuda de Cabri Géomètre II y es manipulable directamente en pantalla. Se dan las instrucciones para construirlo y se explica su funcionamiento. Se utiliza el método de análisis y la potencia de Cabri para explorar, conjeturar, descubrir y demostrar algunas propiedades de las cónicas trazadas. Se ofrece una interpretación del conicógrafo como la proyección ortogonal sobre un plano, de un conicógrafo espacial que secciona conos. Se trata de una experiencia personal, donde los resultados obtenidos, así como la manera como se obtuvieron son descritos.

INTRODUCCIÓN

En Santos (2000) se describe la construcción y uso didáctico de un aparato virtual, que aquí llamaré conicógrafo. En el presente trabajo se estudian las curvas trazadas por dicho aparato, utilizando Cabri Géomètre II como herramienta de exploración y descubrimiento y el método de análisis, para estudiar las curvas generadas. Nos referimos al método de análisis tal como Descartes lo concebía (Descartes, 1637, p. 300): “Así, si queremos resolver cualquier problema, suponemos primero que la solución está dada”. En la Sección 2 se dan las instrucciones en Cabri que permiten construir el conicógrafo. En las Secciones 3 y 4 usando el método de análisis, se parte de que las curvas trazadas son cónicas, en busca de los elementos necesarios para demostrar que las curvas trazadas en realidad lo son. Una vez reunidos estos elementos, en la Sección 5 se sugiere una demostración, que usa las herramientas de la geometría plana elemental para demostrar este hecho. En la Sección 6 se ofrece una interpretación del conicógrafo como la proyección ortogonal de un conicógrafo espacial que traza cónicas al seccionar un cono. En la Sección 7 se hacen algunos comentarios finales sobre este trabajo y se deja abierta una pregunta que ha surgido durante la experiencia aquí descrita.

EL CONICÓGRAFO

El conicógrafo se construye fácilmente con Cabri, siguiendo las instrucciones siguientes:

1) Trazar una “Recta” k cualquiera, 2) Trazar un “Punto” cualquiera P sobre la recta k , 3) Trazar un “Círculo” c de cualquier radio, pero tomando por centro un punto C sobre la recta k , 4) Trazar un “Punto” cualquiera Q sobre el círculo, 5) Usar la herramienta “Simetría axial” para pedir a Cabri el punto simétrico de Q con respecto a la recta k . Llamar R a este punto, 6) Trazar la “Recta” que pasa por los puntos P y Q y luego trazar otra “Recta” que pase por los puntos R y C , 7) Trazar el “Punto de intersección” de las dos rectas anteriores y denominarlo como S . El aparato ya construido luce como en la Figura 1.

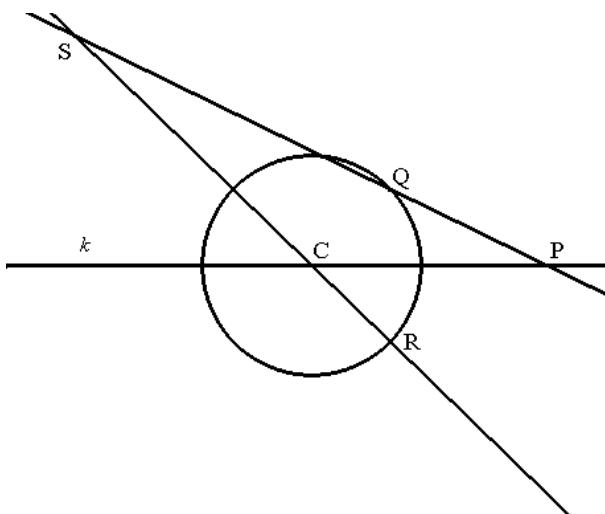


Figura 1

Cabri reconoce como una cónica, el “Lugar geométrico” del punto S , cuando Q se mueve sobre el círculo c . Diferentes cónicas pueden ser obtenidas variando el radio de c o bien moviendo el punto P a lo largo de k . En las Figuras 2 y 3 pueden verse dos ejemplos correspondientes a dos posiciones de P .

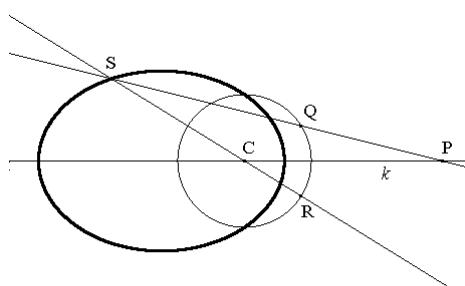


Figura 2

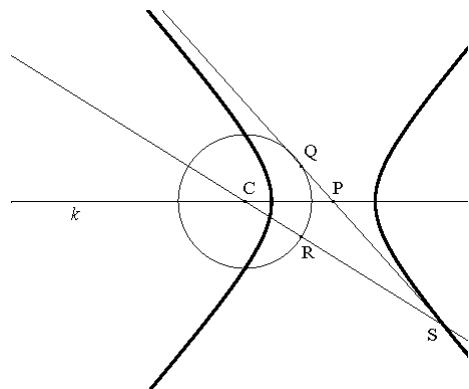


Figura 3

Observando el funcionamiento de este aparato, la primera pregunta que me hice fue: ¿por qué el lugar geométrico trazado es una cónica?

Para responder esta pregunta, me limité primero a explorar la elipse (Figura 2).

Y SI ÉSTA ES UNA ELIPSE, ¿DÓNDE ESTÁN LOS FOCOS?

Siguiendo el método de *análisis*, supongamos que la gráfica mostrada en la Figura 2 es una elipse, entonces los puntos A_1, A_2, B_1, B_2 y el centro D de la elipse pueden ser trazados sin dificultad con Cabri. Ver la Figura 4 en la que los segmentos B_1B_2 y A_1A_2 han sido resaltados.

Los focos F_1 y F_2 pueden construirse ahora como los puntos de intersección de la recta k con el “Círculo” centrado en A_1 y de radio DB_1 . Estos puntos serán los focos de la elipse, puesto que por construcción satisfacen las condiciones $(DB_1)^2 = (A_1F_1)^2 = (DA_1)^2 + (DF_1)^2$ y $(DB_2)^2 = (A_1F_2)^2 = (DA_1)^2 + (DF_2)^2$, véase Lehmann (1972, p. 177). En la Figura 4 se muestran los focos trazados.

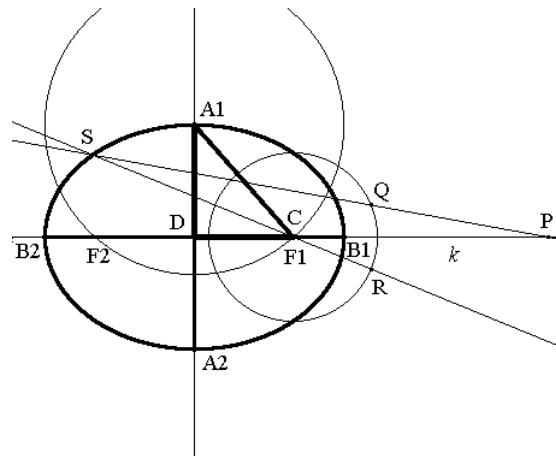


Figura 4

La primera conjetura importante es que, F_1 coincide con C y cuando P se mueve sobre k , el foco F_1 permanece fijo. Esta conjetura surge de manera natural porque al “Arrastrar” P , F_1 coincide siempre con C ; como se observa en los ejemplos de las Figuras 5 y 6.

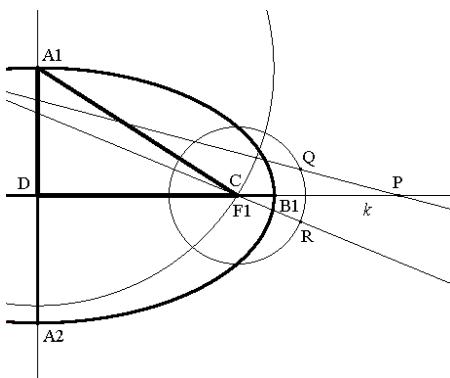


Figura 5

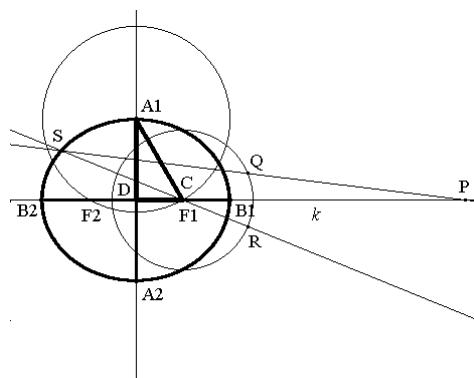


Figura 6

A pesar de que la construcción mostrada en la Figura 4 es posible solo para el caso de la elipse, la conjetura puede generalizarse a todas las cónicas trazadas por el conicógrafo. Para ver la plausibilidad de esta generalización, se pueden hacer mediciones con Cabri para “verificar” que C sigue siendo un foco fijo de la cónica cuando el conicógrafo traza, por ejemplo, una hipérbola. Véase la Figura 7.

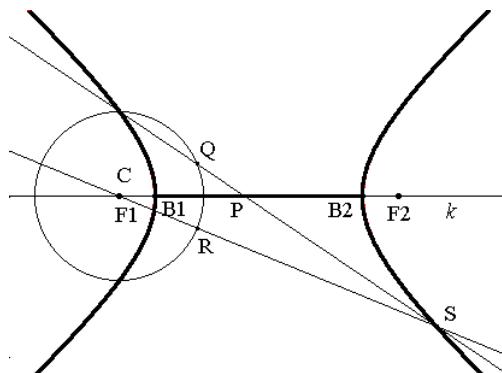


Figura 7

Y SI ES UNA CÓNICA, ¿CUÁL ES SU DIRECTRIZ?

Como las cónicas trazadas tienen un foco fijo, podemos usar la definición siguiente (Lehmann, 1972, p. 220), para buscar la recta que juega el papel de directriz.

“Dada una recta fija l y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama *cónica* al lugar geométrico de un punto S que se mueve en el plano de l y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre una constante positiva.

La recta fija l se llama *directriz*, el punto fijo F , *foco*, y la constante positiva, a la que designaremos por e , *excentricidad* de la cónica.”

El problema ha sido resuelto construyendo los triángulos rectángulos semejantes E_1E_2X y CGX , donde $E_1E_2 = SC$. Efectivamente al hacer que S trace la elipse, el triángulo E_1E_2X se altera, pero el triángulo CGX no. Entonces, puesto que E_1E_2 y E_1X son las distancias de S al foco y de S a la recta perpendicular a k trazada por X , entonces esta última recta debe ser la directriz buscada, porque el cociente E_1E_2/E_1X permanece constante cuando S traza la elipse. Más aún, Cabri puede “verificar” que X es el punto medio del segmento CP y por lo tanto la directriz l es la mediatrix del segmento CP . Ver Figura 8.

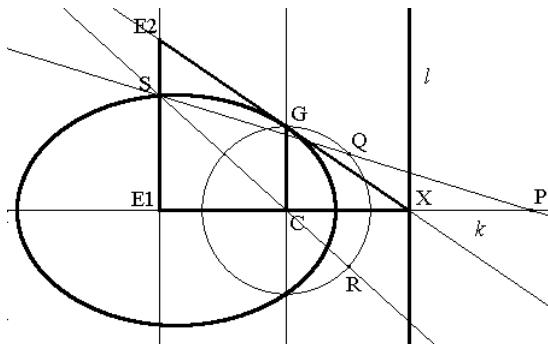


Figura 8

UNA DEMOSTRACIÓN DE QUE EFECTIVAMENTE SON CÓNICAS

Una vez establecido que C es un foco fijo de las cónicas y que la mediatrix de CP es la directriz, puede demostrarse que las curvas trazadas son efectivamente cónicas. La prueba consiste en demostrar que para cada círculo c y cada punto P; cuando Q se mueve sobre c , el punto S se mueve de tal manera que la razón de sus distancias al punto C y a la recta l permanece constante. La demostración completa se omite aquí, pero consiste esencialmente en probar que los triángulos SCL y CRM de la Figura 9 son

semejantes, desprendiendo de aquí que $\frac{SC}{SL} = \frac{CR}{CM}$ es constante puesto que CR y CM son segmentos fijos.

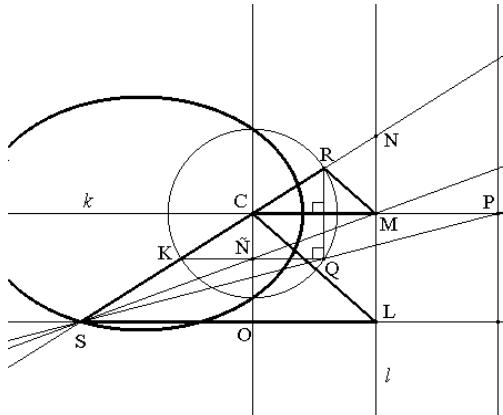


Figura 9

LAS CURVAS SON CÓNICAS, ¿Y DÓNDE ESTÁ EL CONO Y DÓNDE EL PLANO QUE CORTA AL CONO?

Las características de las cónicas graficadas pueden verse como aquellas propiedades que permanecen invariantes, cuando se hace variar el punto P o el círculo c ; La lista siguiente exhibe las más importantes:

- a) Todas las cónicas son simétricas con respecto a la recta k .
- b) Uno de los focos de las cónicas generadas permanece fijo y coincide con el punto C .
- c) La directriz de las cónicas biseca siempre el segmento CP .
- d) Las cónicas pasan por los puntos de intersección del círculo c con la perpendicular a k , que pasa por C .

La observancia de estas características me ha sugerido que el conicógrafo examinado, es en realidad la proyección ortogonal sobre un plano de un dispositivo tridimensional que genera cónicas haciendo cortes en un cono. He arribado a la conjetura anterior, después de analizar el comportamiento de las curvas trazadas:

- a) Al “Arrastrar” el punto P la cónica se modifica, pero pasa siempre por los puntos G y H . Este hecho, pensado en el espacio, podría corresponderse con la existencia de un cono circular cortado por un plano de tal modo que el corte coincida con el diámetro de una de las bases.
- b) Cuando P se aleja del punto C , la cónica se aproxima a una circunferencia. De acuerdo con la interpretación anterior, tiene sentido entonces pensar que cuando P se va al “infinito”, el plano de corte tiende a ser perpendicular al eje del cono.
- c) Cuando el punto P se aproxima a C , la cónica se transforma en una hipérbola, y se asemeja cada vez más a dos rectas conforme P se acerca a C . En el espacio, este hecho podría corresponderse con la aproximación del plano de corte al eje del cono.

Con base en estas consideraciones y procediendo de nuevo por *análisis*, supóngase que existe un dispositivo tridimensional, con las características conjeturadas anteriormente, que genera cónicas al seccionar un cono y cuya proyección sobre un plano π_1 es el conicógrafo descrito antes. Tal dispositivo tridimensional se llamará en lo sucesivo *conicógrafo espacial*.

Una configuración posible de las bases c' y c del cono, consistente con las consideraciones a), b) y c), puede verse en la Figura 10.

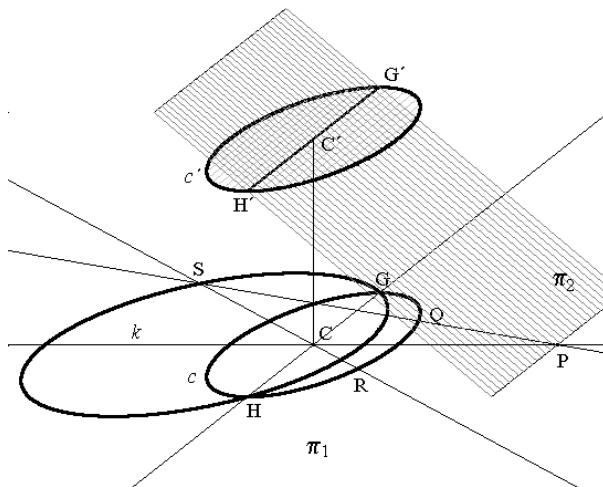


Figura 10

Con estas ideas he tratado de construir un nuevo conicógrafo plano, pero ahora sobre el plano π_2 , cuya proyección ortogonal sobre π_1 sea el conicógrafo original (ver Figura 10). En el nuevo conicógrafo se tiene una elipse en lugar de un círculo, de hecho se trata de la elipse en la que el plano π_2 corta al cilindro definido por c y c' .

El “Lugar geométrico” del punto S' cuando Q' se mueve sobre la elipse, es una curva plana en el espacio, que tiene apariencia de cónica, como lo muestra la Figura 11.

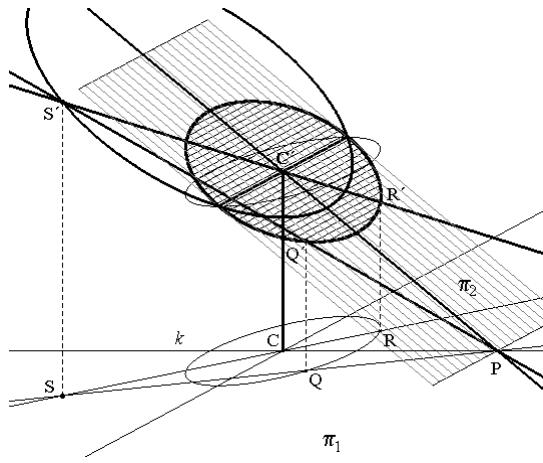


Figura 11

Si la curva trazada por el conicógrafo espacial es realmente una cónica, entonces debiera existir un cono, una de cuyas secciones planas es esta curva. De nueva cuenta se acude a la exploración del conicógrafo original para buscar información sobre la posible posición de este cono. El trazo de la parábola con el conicógrafo me ha proporcionado un dato clave: Al trazar una parábola, la distancia de C a P es el doble del radio de c ,

como lo muestra la Figura 12. Para esa misma posición de P, el conicógrafo espacial debiera también trazar una parábola; para hacerlo, el plano π_2 debiera ser paralelo a una de las generatrices del cono. Pero entonces (ver Figura 13), el vértice V del cono debe localizarse a la mitad de la altura del cilindro.

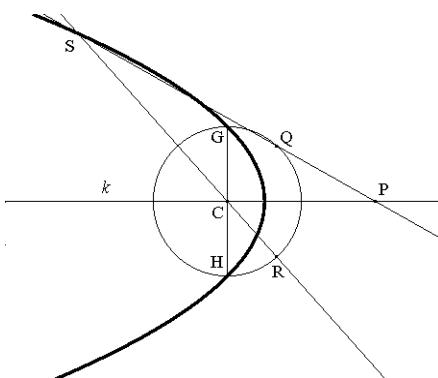


Figura 12

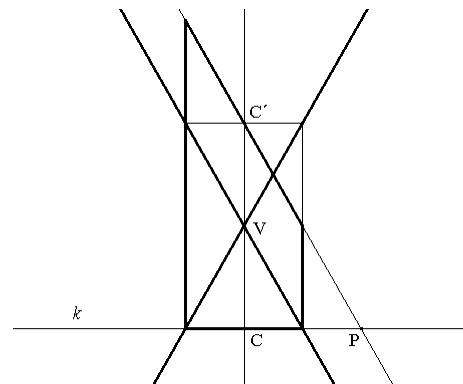


Figura 13

No deja de ser sorprendente, que el cilindro utilizado en la construcción para determinar el cono, no tenga una altura específica.

De acuerdo con las conclusiones extraídas hasta ahora, el conicógrafo espacial, se vería como en la Figura 14, en la que se muestra que efectivamente este dispositivo está seccionando con el plano π_2 el cono encontrado.

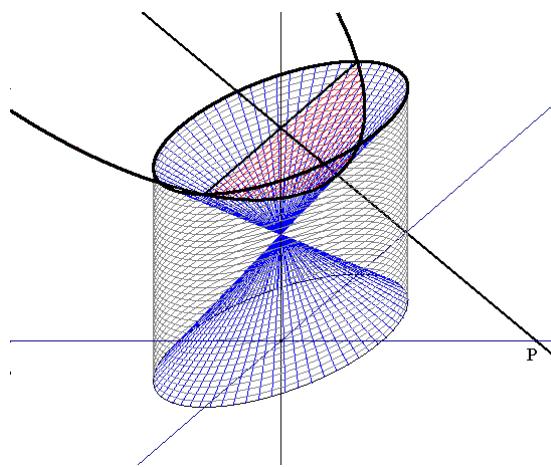


Figura 14

COMENTARIOS FINALES

La potencia exploratoria de Cabri ha sido aprovechada en este trabajo, no solamente para explicar el funcionamiento del conicógrafo y las propiedades de las

curvas que traza, sino además como herramienta que genera ideas en la búsqueda de las demostraciones y como un apoyo para construir una generalización espacial de este conicógrafo.

Al concluir el presente trabajo me ha quedado la impresión de que los softwares de geometría dinámica tienen un gran potencial como herramientas que pueden usarse para *hacer* matemáticas y que este potencial no se está explotando apropiadamente.

Por limitaciones de espacio no he podido entrar en detalles sobre las demostraciones de algunas de las conjeturas presentadas aquí. Sin embargo el lector interesado puede consultar un trabajo más extenso sobre este tema (Soto J. L., 2002), por ejemplo para ver la demostración de que las curvas trazadas por el conicógrafo son efectivamente cónicas, o bien para conocer la prueba de que el conicógrafo espacial funciona como tal, es decir que traza cónicas seccionando un cono.

Quisiera plantear por último una de las muchas inquietudes que me ha surgido a lo largo de este trabajo: El conicógrafo trazado en un plano cartesiano define una transformación geométrica T de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , que transforma círculos en cónicas. Ésta podría definirse como una transformación, que para cada P , manda Q en $T(Q)$, en particular si Q está en el eje de las abscisas, entonces $T(Q) = Q$. En la Figura 15 se muestra el conicógrafo construido en un plano coordenado, donde la recta k se trazó sobre el eje de las abscisas y el punto C se hizo coincidir con el origen, para obtener una versión simplificada de esta transformación. Como puede verificarse fácilmente, T tiene la propiedad de que $T(T(Q)) = Q$, es decir es la inversa de sí misma. Algunas transformaciones geométricas que tienen esta propiedad son muy conocidas, de hecho algunas de ellas como la “Simetría axial” o la “Inversión” están incluidas como herramientas en Cabri. La pregunta es entonces: ¿cómo construir otras transformaciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que sean inversas de sí mismas?

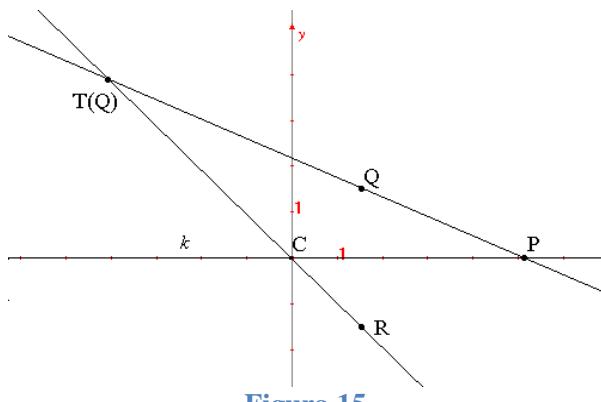


Figura 15

REFERENCIAS

Descartes, R. (1637). *La Géométrie* [Traducido del Francés y el Latín por Smith, E & Latham, M. (1954)] Dover: New York.

Laborde, J.-M. & Bellemain Y. (1994). *Cabri Géomètre II* (software), LSD-IMAG/Texas Instruments.

Lehmann, Ch. (1972). *Geometría Analítica*. México: Uthea.

Santos, M. (2000). *Students Approaches to the Use of Technology in Mathematical Problem Solving*. En Hitt, F. (Ed.) *Representations and Mathematics Visualization* (1998-2000) PME/NA, 112-130.

Soto, J, L., A Propósito de un Instrumento que Grafica Cónicas. [consultado el 28 de junio de 2008].

<http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/report13.pdf>.