EL ARBELOS DE ARQUÍMEDES EN GEOMETRÍA DINÁMICA COMO HERRAMIENTA PARA LA FORMULACIÓN DE CONJETURAS Y ELABORACIÓN DE DEMOSTRACIONES

(1) Mario Dalcín – (2) Mónica Olave

(1) filomate@adinet.co.uy – (2) matemoni@adinet.com.uy

Instituto de Profesores 'Artigas'. URUGUAY

CICATA-IPN. MÉXICO

RESUMEN

Reportamos una experiencia realizada en torno a la enseñanza de la demostración con profesores de matemática de enseñanza media. La misma se llevó adelante en un curso (4 instancias de 2 horas cada una) en el que se trabajó en un ambiente dinámico (con Cabri Géomètre II Plus) y que tenía por objetivos involucrar a los profesores en actividades de formulación de conjeturas y elaboración de demostraciones, así como enseñar el manejo de las herramientas básicas del software. A partir del arbelos, que figura originalmente en el Libro de los Lemas de Arquímedes, se diseñaron actividades (ver anexo) que involucran el trabajo en un ambiente dinámico. Reportamos aquí las conjeturas y demostraciones elaboradas por parejas de profesores sobre una de las actividades diseñadas. Se pudo constatar que la demostración surge como una búsqueda de explicar los por qué, de lograr la comprensión del funcionamiento interno de los conceptos matemáticos involucrados, como una superación de la mera verificación de resultados mediante arrastre.

INTRODUCCIÓN

Las reformas de los planes de estudio de matemática que se han ido dando en los últimos años coinciden en señalar la relevancia de usar tecnología en el aprendizaje de la matemática. El amplio desarrollo y difusión de tecnología, en especial de calculadoras gráficas y de programas de Geometría Dinámica (GD), no sólo ha producido cambios en el tipo de tareas a plantear a los estudiantes sino también en el papel que deberán asumir profesores y estudiantes a lo largo del desarrollo de la clase.

MARCO TEÓRICO

El fracaso en la enseñanza de la demostración, el reconocimiento de que la actividad de demostrar debe tener en cuenta los motivos de los propios estudiantes y la aparición de programas computacionales de Geometría Dinámica (GD) han llevado a buscar alternativas para su enseñanza y aprendizaje. (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000)

Hoy en día los *Standards and Principles for School Mathematics* (NCTM, 2000) promueven "aprender a razonar y construir demostraciones como parte de la comprensión matemática para que todos los estudiantes

- reconozcan los razonamientos y las demostraciones como partes esenciales y poderosas de las matemáticas;
- hagan e investiguen conjeturas matemáticas;
- desarrollen y evalúen argumentos matemáticos y demostraciones;
- seleccionen y usen varios tipos de razonamiento y métodos de demostración."

La forma de funcionamiento del ambiente dinámico "proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de la construcción. En otras palabras, una propiedad geométrica 'es un invariante perceptual'." (Balacheff, 2000) Esto implica un desafío: Si la demostración es vista sólo como verificación de algo que mediante la GD resulta obviamente cierto, es claro que no habrá ningún incentivo en generar una demostración deductiva. Es aquí donde debemos tener presente otras funciones de la demostración: explicación, descubrimiento, comunicación, sistematización, desafío intelectual. (De Villiers, 1993) La convicción de la certeza de una proposición, que bien puede ser facilitada por el análisis de algunos ejemplos y contraejemplos mediante el uso de GD, puede ser el inicio de la búsqueda de una explicación, de aclarar el por qué. (Dreyfus y Hadas, 1996)

Si se busca que los estudiantes conciban la matemática en general y la demostración en particular de esta forma, es necesario que los profesores puedan ser generadores de propuestas en este sentido.

OBJETIVOS, METODOLOGÍA DE TRABAJO, ACTIVIDADES

En el presente curso participaron dieciocho docentes de matemática de Enseñanza Media (docentes sin formación inicial y en ejercicio), se realizó en el marco de actividades de extensión del Instituto de Profesores 'Artigas', y constó de cuatro instancias de dos horas de duración.

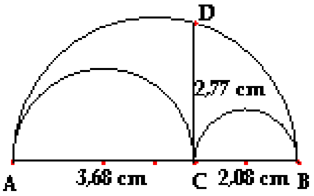
Tuvo como objetivo introducir a los participantes en el manejo y uso de un software de GD (*Cabri Géomètre II Plus*), y aprovechar las posibilidades que brinda el trabajo en un ambiente dinámico -hacer mediciones, construcciones de tablas, cálculos- para formular y reformular conjeturas, y finalmente elaborar argumentos que contribuyeran a la demostración de dichas conjeturas, comparando y analizando las distintas formulaciones que elaboraran los participantes trabajando en parejas y colectivizando al conjunto de participantes.

Los profesores participantes trabajaron en parejas y frente a cada actividad (ver anexo) tuvieron que generar un modelo dinámico que diera cuenta de la situación planteada, formular una conjetura y luego elaborar una demostración que al finalizar se entregaba por escrito a los responsables del curso junto al archivo dinámico respectivo. Al finalizar cada actividad se colectivizaron las distintas formas de generar el modelo dinámico así como las demostraciones elaboradas por las distintas parejas. Se realizó una presentación inicial de las herramientas básicas del software y de su manejo. Durante las actividades se orientó a los docentes en el uso del software así como se tomaron notas de aspectos que parecían relevantes en cuanto al proceder de los docentes.

En el *Libro de los Lemas*, obra de Arquímedes (287 a. C. + 75 = 212 a. C.) compuesta por quince proposiciones referidas a cuestiones de geometría elemental, aparecen tres (4, 5 y 6) donde interviene el *arbelos* o cuchillo de zapatero: zona limitada por tres semicircunferencias tangentes de diámetros AB, AC, CB, donde C pertenece al segmento AB e incluidas en un mismo semiplano. El *arbelos* tiene una serie de propiedades cuyas demostraciones pueden ser hechas recurriendo solamente a conceptos manejados en enseñanza media: ángulos inscriptos, teorema de Pitágoras, semejanzas. Todas las actividades diseñadas tenían en común la presencia del *arbelos* como punto de partida y fueron pensadas para ser trabajadas en un ambiente dinámico.

Reportamos aquí lo trabajado por las parejas de docentes en torno a una de las actividades:

¿Están relacionadas de alguna manera las medidas de los segmentos AC, CB y CD (CD ⊥ AB) al variar el punto C en el segmento AB?



LOS RESULTADOS

LA FORMULACIÓN DE CONJETURAS

Las primeras observaciones que surgen hacen referencia a casos particulares:

- Si C coincide con O entonces los tres segmentos son iguales.
- Si C pertenece al segmento OB entonces se cumple que CB < CD < CA.
- Si C pertenece al segmento OB entonces AC – CD = CD – CB.

Esta conjetura es descartada al hacer mediciones con *Cabri Géomètre II Plus*.

- AC × CB = CD2

La conjetura surge a partir de la constatación hecha por una pareja de participantes que hicieron las mediciones respectivas y ‘verificaron’ la proposición arrastrando C en el segmento AB.

Cada uno de los participantes hace sus propias mediciones: la certeza del resultado es aceptada por todos los participantes.

LA CONSTRUCCIÓN DE DEMOSTRACIONES

La cuestión que se presenta en este momento es ¿por qué se cumple AC × CB = CD^2?

Empieza ahora la búsqueda de una demostración.

Al igual que en la formulación de conjeturas las primeras aproximaciones sólo son válidas en casos particulares:

- Si C = O es cierta, dice un participante.
- Si C = A o si C = B también porque ambos miembros son cero, afirma otro participante.

¿Y si C no está en las posiciones anteriores?

Ahora los participantes trabajan con lápiz y papel, haciendo alguna observación esporádica en la pantalla.

Primera demostración

Una pareja de profesores que trabajan juntos observan que el triángulo OCD es rectángulo por lo que:

$OD^2 = OC^2 + CD^2$.

Como $OD = \dfrac{AB}{2}$ y $OC + CB = \dfrac{AB}{2} \rightarrow OC = \dfrac{AB}{2} - CB = \dfrac{AB - 2\times CB}{2}$

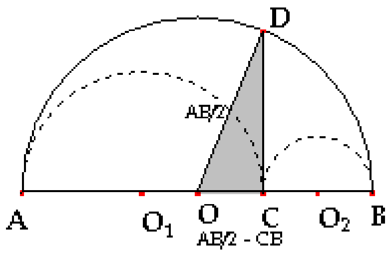
Sustituyendo tienen $\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{AB - 2\times CB}{2}\right)^2 + CD^2$

$\dfrac{AB^2}{4} = CD^2 + \dfrac{AB^2}{4} - AB \times CB + CB^2$

$AB \times CB - CB^2 = CD^2$

$CB \times (AB - CB) = CD^2$

$CB \times AC = CD^2$



Segunda demostración

En ABD: $AB^2 = AD^2 + BD^2$

También en ACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2$

en BCD: $BD^2 = CB^2 + CD^2$

y $AB = AC + CB$

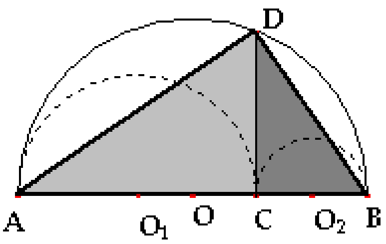
Sustituyendo en la primera igualdad:

$(AC + CB)^2 = (AC^2 + CD^2) + (CB^2 + CD^2)$

$AC^2 + 2 \times AC \times CB + CB^2 = AC^2 + 2 \times CD^2 + CB^2$

$2 \times AC \times CB = 2 \times CD^2$

$AC \times CB = CD^2$



Tercera demostración

Los triángulos ACD y DCB son semejantes por lo que

$\frac{AC}{CD} = \frac{DC}{CB} \rightarrow AC \times CB = CD^2$.

Cuarta demostración

Usando el teorema de la altura (En un triángulo ABD rectángulo en D con altura CD se cumple $AC \times CB = CD^2$.)

Quinta demostración

Si por un punto J se trazan dos secantes PP' y QQ' a una circunferencia se cumple que

$JP \times JP' = JQ \times JQ'$ (potencia de un punto respecto de una circunferencia o proposición de Steiner).

La reflexión sobre las demostraciones elaboradas

Generalmente la presentación de un resultado matemático termina cuando se llega al final de la demostración, cuando se ha verificado dicho resultado.

En el curso hemos propuesto a los participantes explicitar los conceptos y resultados que intervienen en cada demostración, rescatar las conexiones que establece cada demostración con conceptos anteriores.

Primera demostración

Se centra la atención en el triángulo OCD que es rectángulo, por el teorema de Pitágoras tenemos que $OD^2 = OC^2 + CD^2$.

De los tres segmentos involucrados en esta igualdad solo CD interviene en la proposición que queremos demostrar por lo que buscamos ahora hacer intervenir a los segmentos AC y CB. Para ello sustituimos OD por $\frac{AB}{2}$ y a OC por $\frac{AB}{2} - CB$, donde el segmento $AB = AC + CB$. Lo que siguió fueron simplificaciones.

Segunda demostración

Se tienen en cuenta tres triángulos rectángulos: ACD y BCD los son por ser CD perpendicular a AB, ADB lo es por pertenecer D a la semicircunferencia de diámetro AB.

Haciendo uso del teorema de Pitágoras en este último tenemos:

$AB^2 = AD^2 + BD^2$.

Sustituimos AD^2 y BD^2 por las sumas de cuadrados obtenidas haciendo uso del teorema de Pitágoras en ACD y BCD: $AD^2 = AC^2 + CD^2$ y $BD^2 = CB^2 + CD^2$.

A continuación se desarrollan los cuadrados y se simplifica.

Tercera demostración

En esta demostración se atiende un aspecto que no había aparecido en las demostraciones anteriores: la semejanza de los triángulos ACD y DCB.

Cuarta demostración

Aquellos participantes que tenían presente el teorema de la altura no hicieron más que constatar que estaban en las condiciones que pedía la hipótesis de dicho teorema: ABD rectángulo y CD altura.

Obsérvese que la tercera demostración es una demostración de lo que en nuestro país se conoce como ‘teorema de la altura’.

Quinta demostración

Nuevamente aquí se apela a un resultado matemático ya establecido y lo que se hace es constatar que se está en las condiciones requeridas en la hipótesis de dicho resultado.

Algunos participantes, que no conocían la proposición de Steiner, se ponen a trabajar en una demostración para ella.

CONCLUSIONES

El *arbelos* sirvió de inspiración para formular nuevas conjeturas a partir de las actividades específicamente diseñadas en *Cabri Géomètre II Plus* a tal fin. Las parejas de docentes fueron capaces de elaborar conjeturas y también demostraciones para dichas conjeturas trabajando en un ambiente dinámico. Según los propios docentes "esta forma de trabajo es una alternativa a la enseñanza expositiva de la matemática donde la actividad central del estudiante consiste en repetir resultados matemáticos expuestos por el profesor o que figuran en los libros, transformándose de esta manera en una actividad carente de sentido para él." El compromiso fue arriesgar conjeturas para inmediatamente ponerlas a prueba, aceptando el desafío de equivocarse como también el placer de encontrar argumentos propios que agregaran claridad y comprensión y no solo certeza. En varias oportunidades se elaboraron demostraciones para casos particulares como un primer intento de demostración de lo que se había 'verificado' mediante arrastre. Estas demostraciones en casos particulares les permiten por un lado, la verificación matemática de la conjetura, y por otro, comenzar a comprender la ligazón íntima de los elementos involucrados en las conjeturas previamente formuladas. Una vez que logran comprender el funcionamiento de la conjetura en esos casos particulares empiezan a buscar caminos que les permitan elaborar una demostración general. La demostración surge como una búsqueda de explicar los por qué, de lograr la comprensión del funcionamiento interno de la proposición, como una superación de la mera verificación de resultados mediante arrastre.

REFERENCIAS

Balacheff, N. *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics.* En D. Pimm (Ed.), Mathematics, Teachers and Children, pp. 216-235. London, U. K.: Hodder & Stoughton, 1998.

Balacheff, N. *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente, 2000.

Bankoff, L. *The Marvelous Arbelos.* En R. Guy and R. Woodrow (Eds.), The Lighter Side of Mathematics, pp. 247-253. U.S.A.: MAA, 1994.

De Villiers, M. *The Future of Secondary School Geometry*. La lettre de la Preuve: mars-avril, 1998. http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98

Hadas, N.; Hershkowitz, R. y Schwarz, B. The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. Educational Studies in Mathematics, 44, 127-150, 2000.

Heath, T. L. *Book of Lemmas*. En T. L. Heath (Ed.), The Works of Archimedes, pp. 301-318. USA: Dover, 1953.

Mariotti, M. A. *Introduction to proof: The mediation of dynamic software environment.* Educational Studies in Mathematics, 44, 25-53, 2000.

NCTM Standards and Principles for School Mathematics. USA: NCTM, 2000.