DISEÑO DE ACTIVIDADES INTERACTIVAS COMPUTACIONALES PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

(1) Olga Patricia Rodríguez – (2) Heber Sarmiento Barrera –

(3) Benjamín R. Sarmiento Lugo

(1) bs@cable.net.co – (2) hebersarmiento@etb.net.co – (3)

olgapatriciarodriguez@gmail.com

Universidad Autónoma de Colombia

RESUMEN

El proyecto que se propone, parte de la premisa de que las ayudas multimediales y tecnológicas, en donde interviene software educativo, constituyen un medio de comunicación entre el profesor y el estudiante que ayuda a hacer más eficaz la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Se tratará de aprovechar las potencialidades de los computadores y las posibilidades que ofrecen los paquetes educativos para generar una serie de situaciones de aprendizaje basadas en representaciones dinámicas e interactivas de los objetos matemáticos, permitiendo a los estudiantes visualizar propiedades y relaciones que no se podrían apreciar en otros tipos de representaciones. Para el proyecto que presentamos se usará software de Geometría Dinámica y Matemáticas Interactivas como, Cabrí y Descartes, para diseñar applets interactivos que ayuden a complementar la actividad del docente

INTRODUCCIÓN

El proyecto que aquí se propone, parte de la premisa de que las ayudas multimediales y tecnológicas, en donde interviene software educativo, constituyen un medio de comunicación entre el profesor y el estudiante que ayuda a hacer más eficaz la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Básicamente se trata de aprovechar las capacidades de graficación, procesamiento y almacenamiento de los computadores, así como las facilidades que dan los paquetes educativos como Cabrí, Regla y compás, Geogebra, Derive y Descartes, entre otros, para generar una serie de situaciones de aprendizaje basadas en representaciones dinámicas e interactivas de los objetos matemáticos, permitiendo a los estudiantes visualizar propiedades y relaciones que no se podrían apreciar fácilmente en una representación algebraica o gráfica estática.

Estas situaciones y actividades que serán diseñadas y elaboradas previamente, permitirán:

- Al profesor, ilustrar algunos conceptos o algunos resultados;
- Al estudiante, experimentar confrontando la teoría con algunos ejemplos o bien verificar la solución de algunos ejercicios.

OBJETIVOS DE PROYECTO

OBJETIVO GENERAL

Diseñar un paquete de actividades computacionales interactivas a partir de software de Geometría Dinámica, para apoyar la presencialidad en los cursos de Cálculo Diferencial.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar la guía de cátedra de cálculo diferencial y hacerle los ajustes pertinentes de acuerdo a los libros de texto más usados en la enseñanza del cálculo diferencial.
- Hacer una selección de actividades en libros de texto que sean susceptibles de convertir en actividades interactivas.
- Diseñar las actividades interactivas para los conceptos de cálculo diferencial que tradicionalmente han sido de difícil aprendizaje, usando software libre.
- Diseñar los textos y preguntas que acompañarán a cada una de las actividades interactivas diseñadas.
- Ensamblar el paquete de actividades y crear el CD auto-ejecutable.
- Diseñar un mecanismo de seguimiento de la implementación del material diseñado.
- Hacer seguimiento a dos cursos de cálculo diferencial en donde se usará el material diseñado.

IMPACTOS Y BENEFICIOS

BENEFICIOS PEDAGÓGICOS Y MATEMÁTICOS

El uso de los apoyos virtuales manipulables generan dos tipos de beneficios en el desarrollo de un curso de matemáticas, los pedagógicos y los disciplinares:

a) Beneficios Pedagógicos:

- Son representaciones más reales que los ejercicios escritos o las descripciones de fenómenos comunes en los textos.
- Favorecen ciertos procesos de pensamiento del estudiante al tiempo que éste construye conocimiento matemático.
- Posibilitan mediante retroalimentación el establecimiento de vínculos entre lo concreto y lo simbólico.
- El estudiante puede diseñar objetos, moverlos y modificarlos, y expresar esas acciones en números o palabras.
- Promueven explicaciones completas y acciones precisas, ya que el estudiante debe especificarle al computador, con precisión, lo que debe hacer para obtener resultados concretos.
- Los productos realizados pueden guardarse, modificarse y reutilizarse a voluntad, de esta manera no se pierde todo el trabajo realizado.
- Se pueden diferenciar las diversas formas de varias maneras, ya que es posible configurar colores, fondos, tamaños, etc.
- Surten un efecto mucho más motivador que el simple trabajo con papel y lápiz.
- Muchos objetos son más fáciles de construir que con materiales físicos, lo cual implica beneficios económicos.
- Ofrecen la posibilidad de obtener un registro del trabajo con mucha facilidad, ya que estos programas permiten exportar a diferentes formatos un momento específico.

b) Beneficios Disciplinares:

- Favorece procesos mentales en los estudiantes y ayuda a tener mayor claridad del significado geométrico de los objetos matemáticos.
- Permite a los estudiantes razonar mientras el profesor les ilustra o ellos manipulan en el computador los objetos dinámicos y las expresiones matemáticas relacionados con éstos.
- La flexibilidad de los apoyos virtuales manipulables permite hacer modificaciones a los objetos que no son posibles con figuras físicas (cambios en forma o tamaño, cambios generales o particulares, etc).

- Facilita la visualización de los cambios en las representaciones matemáticas y la exploración rápida de las representaciones simbólicas con el simple movimiento del ratón, cosa que no sucede cuando se utiliza sólo lápiz y papel.
- Permite visualizar los efectos que tiene en una representación gráfica la modificación de un parámetro.
- Posibilita agilizar la exposición del profesor y hacer una retroalimentación inmediata.
- Facilita relacionar diferentes representaciones semióticas de los objetos matemáticos (simbólica, gráfica, tabular, etc.).
- Posibilita que el estudiante obtenga una retroalimentación inmediata de operaciones que realiza.
- Permite que se detenga la aplicación en cualquier momento del proceso si se requiere tiempo para pensar sobre éste. Además, puede repetirse si se desea ver nuevamente parte de esta o ensayar otras respuestas.

RESULTADOS E IMPACTOS ESPERADOS:

- Mayor manejo de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial reflejada en las pruebas conjuntas al ser comparado con los otros grupos.
- Motivación y vinculación de un mayor número de docentes en este tipo de proyectos.
- Paquete de actividades de buena calidad y reutilizable en los futuros cursos de cálculo diferencial.
- Cambio de imagen por parte de los estudiantes de los apoyos que reciben en beneficio de su formación de parte de la institución.

USUARIOS DIRECTOS E INDIRECTOS:

- Dos grupos de cálculo diferencial.
- Todos los grupos de cálculo diferencial.
- Estudiantes que ya tomaron el curso y quieran adquirir el material para repasar o para sus familiares.
- Docentes que quieran adquirir el material para usarlo como apoyo para sus clases.

ALGUNAS ACTIVIDADES PREVISTAS

CONSTRUCCIÓN Y ANÁLISIS DE FUNCIONES

Uno de los propósitos en esta parte es diseñar numerosas actividades para conceptualizar sobre las características de los diferentes tipos de funciones. A manera de ejemplo, mostraremos el caso de la función y = Sen(x).

Para el trazado de la gráfica de la función f(x) = Sen(x), seguiremos los siguientes pasos con Cabrí:

- Activar la herramienta Mostrar Ejes, y crear un punto P sobre el eje X.
- Activar la herramienta Ecuación y Coordenadas, y usarla para generar las coordenadas del punto P. Aquí se remienda dejar la primera componente.
- Activar la herramienta Calcular y usarla para hallar Sin(a), donde a es la primera componente de las coordenadas del punto P.
- Activar la herramienta Transferencia de Medidas y con ella transferir la medida Sin(a) al eje Y. Aquí se creará automáticamente un punto P´.
- Activar la herramienta Recta Perpendicular para trazar perpendiculares l_1 y l_2 a los ejes coordenados X e Y, que pasen por los puntos P y P´ respectivamente. Hallamos la intersección L entre estas perpendiculares con la herramienta Puntos de Intersección.
- Con la herramienta Lugar Geométrico, determinamos la gráfica que genera el punto L cuando se mueve el punto P. Aquí se obtiene la gráfica de f(x) = Sen(x). (Figura 1)

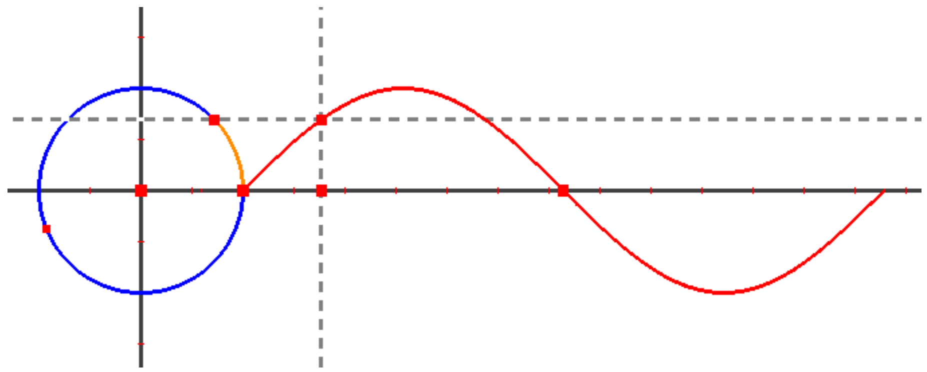

Figura 1

- La intención final es diseñar applets interactivos en donde el estudiante pueda manipular parámetros que le permitan modificar la amplitud, los desplazamientos y el periodo en una función de la forma y = A Sen(Bx + C) + D.

CONSTRUCCIONES PARA LÍMITES

La siguiente actividad está dirigida a conceptualizar sobre límites:

- En el plano cartesiano, trazar una circunferencia C_1 centrada en el punto (0,a) y de radio a.
- Trazar un segmento desde el punto (0,0) hasta el punto (2a,0) y en él tomar un punto móvil P.
- Con centro en el origen trazar una circunferencia C_2 que pase por P.
- Observar que C_2 corta a C_1 y al eje y, a esos puntos de corte llamarlos Q y R, respectivamente (trabajar en el primer cuadrante).
- Trazar una recta por los puntos Q y R.
- Observar que la recta QR corta al eje x en un punto S.

En la figura 2 se muestra la construcción descrita:

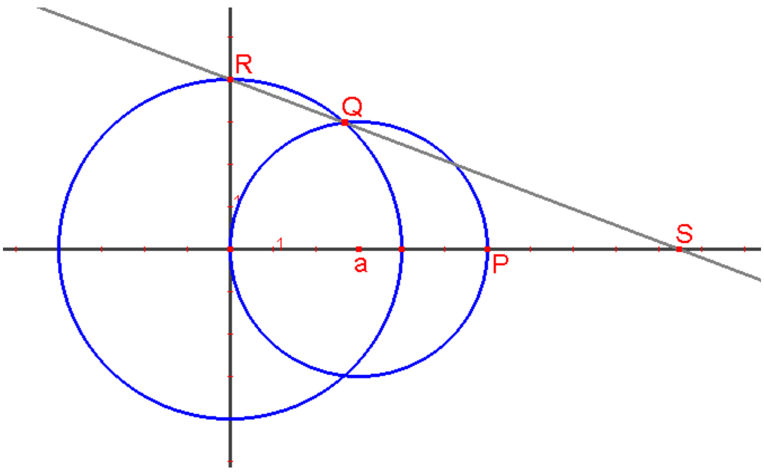

Figura 2

Ahora se trata de predecir, sin manipular nada en la construcción, hacia dónde tiende el punto *S* cuando el punto *P* se acerca al origen. Observe que cuando *P* se acerca al origen, la pendiente de la recta *QR* parece tender a cero, es decir la recta *QR* tiende a ser paralela al eje *x* luego podríamos creer que el punto *S* se va al infinito, ¿cree usted esto o no?.

Ahora, manipulando la construcción en Cabri podemos hacer que el punto *P* se acerque al origen para observar que realmente el punto *S* tiende hacia 4*a* y no hacia infinito.

Por último, nombrar una variable r como la longitud del segmento OP y deducir que si l es la longitud del segmento OS entonces l en función de r está dada por

$$l(r)=\frac{r^2}{2a-\sqrt{4a^2-r^2}}$$

De donde es inmediato que el límite de l cuando r tiende a cero es igual a 4a.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Una de las actividades interactivas que se diseñará será la clásica ilustración de la interpretación geométrica de la derivada, para la que se aprovecharán las funciones construidas en el capítulo de funciones. Por el momento ilustraremos el caso de la función y = Sen(x)

Para graficar la derivada de f(x)=Sen(x), primero diseñaremos un mecanismo que nos permita variar el valor de epsilon. Para esto trazaremos un pequeño segmento AB y sobre el crearemos un punto D y un segmento AD que se variará su longitud a medida que D se desliza sobre AB. La medida de AD será el valor de epsilon.

- Con la herramienta Compás dibujamos una circunferencia con centro en P y radio AD, y elegimos una de las intersecciones de esta circunferencia con el eje X, a esta intersección la llamaremos Q. El segmento PQ tendrá longitud epsilon.
- Con la herramienta Ecuación y Coordenadas hallamos las coordenadas del punto Q, es recomendable dejar solo la primera componente.
- Con la herramienta Calcular hallamos el valor Sin(a) correspondiente al punto Q.
- Con la herramienta Transferencia de Medidas se transfiere al eje Y la nueva medida de Sin(a), aquí se crea automáticamente un punto Q´.

- Con la herramienta Recta Perpendicular se trazan perpendiculares m_1 y m_2 a los ejes coordenados X e Y, que pasen por los puntos Q y Q´ respectivamente. Hallamos la intersección M entre estas perpendiculares con la herramienta Puntos de Intersección.
- Los puntos L y M están sobre la gráfica de f(x) = Sen(x). Trazamos la recta LM. Hasta aquí es claro para los estudiantes que la recta LM es una recta secante a la curva f(x) = Sen(x).
- Si acercamos los puntos A y D del segmento AB, se puede ver que disminuye el valor de epsilon y que la recta secante LM tiende a ser una recta tangente. Esto ayuda a aclarar la relación dinámica “recta secante – valor del epsilon – recta tangente”.
- Dado que tan(□) = Cateto Opuesto / Cateto Adyacente y haciendo Cateto adyacente = 1, tendremos que tan(□) = Cateto Opuesto. Dibujaremos un triángulo rectángulo cuyo cateto adyacente mida una unidad y esté sobre la recta l_1. Este cateto comienza en el punto L y termina en un punto K. Para completar el triángulo se traza una perpendicular a l1 que pase por K, esta recta se interseca con la recta LM en el punto R, así tendremos el triángulo LKR.
- La medida del segmento KR (cateto opuesto) tiene el “valor de la pendiente”. Cuando la función es decreciente se puede apreciar que el segmento RK se invierte, ya que R está sobre la recta tangente. Esto se puede aprovechar para trazar la función derivada.
- Proyectamos el segmento KR sobre el eje X de tal modo que K coincida con P y hacemos el epsilon tan pequeño como el programa lo permita, así la recta secante no se verá secante sino tangente.
- El punto R (del cateto opuesto) determinará un lugar geométrico a medida que se desplace el punto P. Este lugar geométrico es la función de las pendientes o derivada.
- En las figuras 3 y 4 se muestra el triángulo LKR para momentos en que la recta tangente tiene pendiente positiva y negativa respectivamente, además se muestra la proyección del segmento KR.

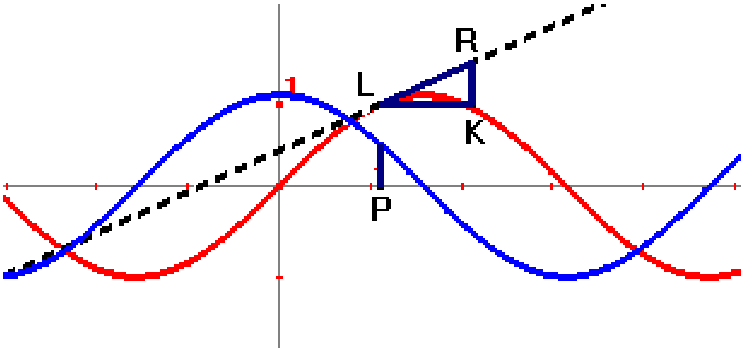

Figura 3

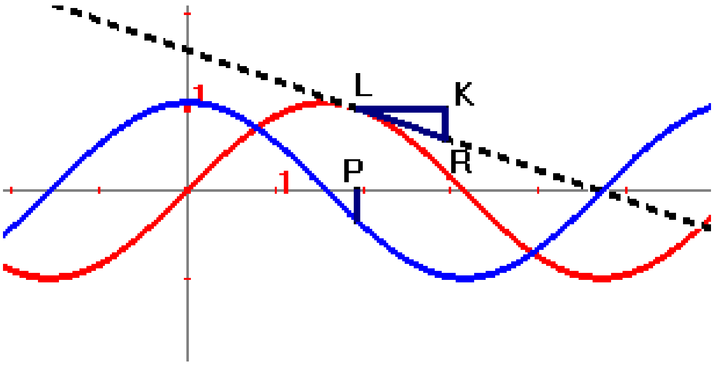

Figura 4

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

En la sección de aplicaciones de la derivada se pretende ilustrar mediante applets interactivos varias situaciones de razón de cambio y de optimización. Aquí ilustraremos uno de los problemas clásicos de máximos y mínimos.

Consideremos la siguiente situación: En cada esquina de una lámina cuadrada de lado *a* se recorta un cuadrado de lado *x* (Figura 5). Plegando según las líneas punteadas se obtiene una caja sin tapa. ¿Para qué valor de *x* el volumen de la caja es máximo?

Para hacer la construcción usando el software Cabrí, se fija un valor para el lado del cuadrado o la lámina, digamos que sea a.

- Construir un cuadrado de lado a que representa la lámina, fijar un punto genérico P en uno de sus lados y construir cuatro cuadrados pequeños de lado x, uno en cada esquina de la lámina como se muestra en la figura 5. La construcción se realiza de tal manera que cuando se desplace el punto P los lados de los cuatros cuadrados varíen simultáneamente simulando los cortes (varía el valor de x, $0 \leq x \leq a/2$).

- Hechos los cortes se simula la construcción de la caja Esta operación se realiza usando la opción transferencia de medidas. Se transfieren las longitudes de los lados de la base (es un cuadrado de lado a-2x) y de la altura (x). Luego trazando rectas paralelas y/o perpendiculares se construye la caja cuyo volumen es V(x)=(a-2x)(a-2x) x
- Vale decir que la simulación de los cortes está ligada con la construcción de la caja, ya que al arrastrar el punto P deben variar los cuadrados y las dimensiones de la caja.
- Arrastrando con el mouse el punto P se generan diferentes valores para x y V(x), generándose una tabla donde se puede visualizar el máximo valor para el volumen de la caja.

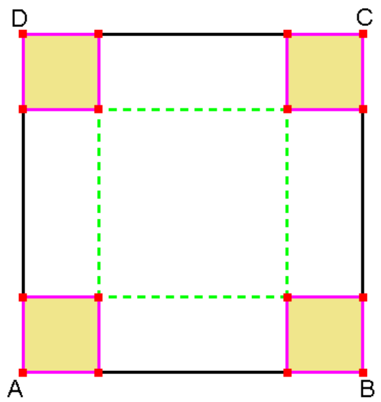

Figura 5

- Finalmente en el sistema de coordenadas cartesianas se construye el lugar geométrico generado por los puntos (x,V(x)) cuando se hace variar el valor de x.

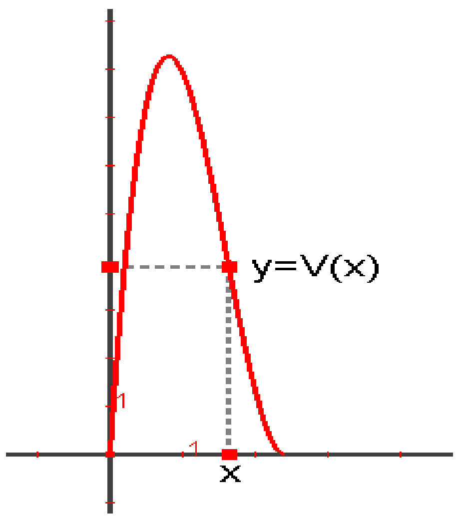

Figura 6

Después de construir las diferentes partes del modelo (Lámina, Caja, Función, Tabla) se pueden mostrar simultáneamente y ver que la variación de x influye en el tamaño del corte, las dimensiones de la caja y por supuesto en el volumen que encierra la caja.

REFERENCIAS

Stewart, James. *Cálculo, Trascendentes tempranas.* Thompson Learning. Cuarta edición. México, 2002.

Hughes, Debora. *Cálculo*. Editorial CECSA. México, 1996.

Thomas y Finney. *Cálculo de una Variable*. Addinson Wesley Logman. Novena Edición. México, 1999.