

CREACIÓN DE UN JUEGO Y OTRAS APLICACIONES EN CABRI PARA LA ENSEÑANZA DE LA MEDIA ARITMÉTICA

José Alexandre dos Santos Vaz Martins

jasvm@ipg.pt

Instituto Politécnico da Guarda. PORTUGAL

RESUMEN

En este reporte breve se pretende presentar la motivación y la fundamentación para la creación de un juego adaptado de una forma visual y dinámica a la enseñanza de la media aritmética en un nivel educativo básico. Se mostrarán, también, la construcción y las reglas del juego. Además, se presentarán otras aplicaciones del Cabri Géomètre para la enseñanza de la media aritmética, permitiendo el abordaje de este concepto estadístico, que tiene una interpretación gráfica y/o geométrica. Con este reporte se espera contribuir de una forma concreta para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística, permitiendo una más fácil asimilación por parte de los alumnos, una mayor facilidad de exposición por parte de los profesores, y una más fructífera interacción entre profesor y alumnos, fomentando una descubierta progresiva y dinámica por parte de los alumnos.

INTRODUCCIÓN

El progreso científico y de nuestra civilización ha creado cada vez más necesidades estadísticas, lo que ha obligado a una mayor divulgación del conocimiento y métodos estadísticos. Así, pasó a haber una fuerte necesidad de dar a la población en general una formación básica de manera a aumentar su literacia estadística, cada vez más fundamental en la sociedad actual, pues tal como cita Batanero (2001), refiriéndose a Begg (1997), "(...) la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos." (Batanero, 2001, p.118). En consecuencia, en la enseñanza universitaria hubo, en los últimos 50 años, un aumento enorme de alumnos, de

diplomaturas y de asignaturas de Estadística, lo que fue acompañado por el alargamiento de la enseñanza de la Estadística a los niveles no universitarios, extendiéndose, en términos curriculares, a los años iniciales de la enseñanza primaria. Pero, también hay una creciente aversión en relación hacia la Matemática e, consecuentemente, hacia la Estadística. Este último factor es, simultáneamente, una indicación de la necesidad de cambiar y una fuente de interrogaciones para aquellos que enseñan Estadística. En este contexto, el método de ensino solamente basado en la exposición de teoría y de los métodos y en la manipulación y cálculo ha sido considerado, y cada vez más, como no adecuado, dando lugar a un ensino que procura también incorporar un contacto más estrecho con la práctica de la Estadística conectada con la realidad y, además, privilegiar la adquisición real e integral de conceptos que están en el cerne del desenvolvimiento del raciocinio estadístico. En este sentido es necesario cuestionar e investigar aspectos como la adecuación de los currículos a los objetivos de la enseñanza y de sus destinatarios; la definición del cuadro formativo de aquellos que enseñan Estadística en los varios niveles de la enseñanza; y la escoja de las metodologías didácticas e pedagógicas para alcanzar una enseñanza de la Estadística más eficiente y eficaz. Además, y a pesar de la manifiesta importancia de la Estadística, Ponte y Fonseca (en Loureiro, 2000) y Carvalho (en SPE, 2006) indican que, en Portugal, la Estadística parece ser aún un tema marginal del currículo, que fácilmente se transpone para segundo plano y que las recomendaciones sugeridas en los currículos no son seguidas. Ora, para que se ultrapase la tendencia formalista y las dificultades de implantación del nuevo paradigma de la enseñanza de la Estadística, y según Carvalho (en SPE, 2006), el profesor tiene un papel crucial, en que sus concepciones acerca de la Estadística e su conocimiento estadístico son determinantes para el trabajo de los alumnos. Se debe referir, también, que las referidas dificultades no son apenas sentidas en Portugal, pero también en muchos otros países (incluyendo iberoamericanos). Así siendo, la enseñanza de la Estadística, en particular, es un tema actual que "... requiere innovaciones y cambios en las formas tradicionales de formación, producción y comunicación de la información..." (Documento-Marco del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, 2003, p. 2).

Por otro lado, hubo, también, en los últimos años y en muchos países (incluyendo los países iberoamericanos), un verdadero "boom" en la utilización y

adquisición de computadores, en especial, en las escuelas, bien como de otras tecnologías perfectamente adaptables a la enseñanza. Así, basadas en el uso de herramientas tecnológicas surgen nuevas posibilidades de enseñanza, con las cuales es posible proporcionar a los alumnos una experiencia diferente, que permita un aprendizaje más eficiente y eficaz, tal como Darius, Michiels y Raeymaekers (2002, p.1) sugieren cuando afirman que "[it] has been argued that supplementing the traditional material with tools based on a visual approach and a more active form of learning could improve the effectiveness of the teaching.". Pero esto supone un gran desafío y una gran labor para el profesor, tal como menciona Godino, Ruiz, Roa, Pareja, y Recio (2003), a propósito del uso de *applets*, en contexto de clase, por alumnos jóvenes.

Teniendo también en cuenta las enormes potencialidades de la exploración gráfica y visual del entorno tecnológico actual y la propia naturaleza de la Estadística, es natural considerar la visualización como un aspecto extraordinariamente importante tanto en la creación, como en la descubierta de nuevas relaciones, bien como en la transmisión de matemática, tal como lo afirma Guzmán (2001). Las ideas, los conceptos y los métodos en Matemática, en general, y en Estadística, en particular, presentan muchas veces una gran riqueza de contenidos visuales, cuya utilización, especialmente en un ambiente dinámico, es muy útil a varios niveles. Evidentemente que la visualización es una componente más en la continua tentativa de mejorar la enseñanza, siendo necesario un gran trabajo de reflexión e investigación de forma a adecuarla a la enseñanza de conceptos específicos.

Por todo esto, es muy importante que se estimule la visualización de las medidas estadísticas, intentando ultrapasar las cuestiones de difícil interpretación y motivación usando los medios tecnológicos disponibles en la actualidad. Se plantean, pues, nuevas situaciones pedagógicas y didácticas.

Además, tal como indica Batanero (2000, p.10), "los conceptos estadísticos, incluso los más sencillos como la media, mediana y moda tienen un significado complejo y por lo tanto será necesario un periodo dilatado de enseñanza a lo largo de la educación primaria y secundaria para lograr el progresivo acoplamiento de los significados personales que construyen los alumnos a los significados institucionales

que pretendemos adquieran.”. En particular, para la media y sus elementos intensivos, y según Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos (1994, p.4), se tiene que respecto “... a la comprensión de los aspectos conceptuales, Strauss y Bichler (1988) investigaron el desarrollo evolutivo de la comprensión de esta noción en alumnos de 8 a 12 años, distinguiendo las siguientes propiedades:

La media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución.

La suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero.

El valor medio es influenciado por los valores de cada uno de los datos.

La media no tiene por qué ser igual a uno de los valores de los datos.

El valor obtenido de la media puede ser una fracción (ello puede no tener sentido para la variable considerada).

Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.

La media es un “representante” de los datos a partir de los que ha sido calculada.(...)”.

En ese sentido, se pretenden abordar el concepto de media y sus propiedades, presentando situaciones creadas que visualmente estimulen, motiven y faciliten la interiorización del concepto de media aritmética en niños desde los 7 años a los 11-12 años, que puedan ayudar a reforzar el trabajo cooperativo y, al mismo tiempo, que tengan añadida una componente lúdica, tan importante hoy en día para esta faja de edades. Así, se creó un juego (aún en una fase experimental) y algunas otras aplicaciones para introducir el concepto de media que, de una manera simple (con posibilidad de crear matices de menor simplicidad), y mismo sin saberlo (ó no), los jóvenes puedan “construir” elementos del concepto y incorporar algunas de sus propiedades.

EL JUEGO

El juego se basa en la idea de que la media aritmética representa el valor que si todos los elementos de una muestra lo tuviesen, su suma total sería igual a la suma de todos los valores de los datos originales. Como es conocido, para datos no clasificados (como es el caso) la media aritmética se calcula sumando todos los valores de los datos, dividiendo el resultado por el número de datos. Así, el juego en la primera etapa presenta 6 “recipientes” iguales con capacidad máxima 5, pero con diferentes niveles de lleno

(3, 4, 1, 4, 2, 4, respectivamente), y la puntuación a cero, como se puede observar en la figura 1.

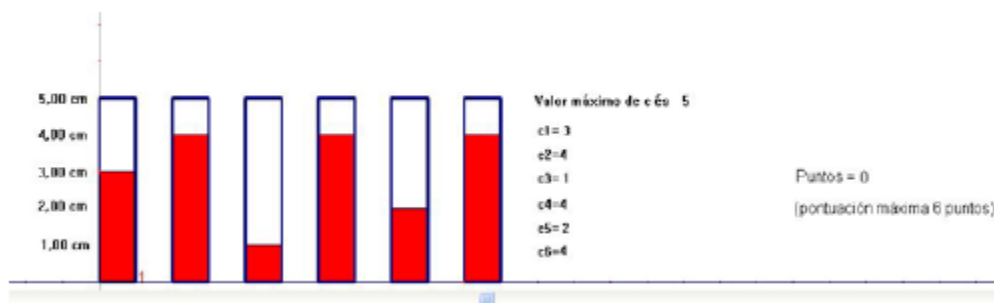


Figura 1: Etapa 1 (inicio) del juego

En las etapas siguientes, como es posible ver en la figura 2, se empieza con los niveles de la etapa anterior y solo se pueden hacer 2 cambios simétricos en los v_i , $i=1, 2, \dots, 6$, y en el caso del cambio no ser simétrico el error deja de ser 0 (y es acompañado por la representación de un segmento proporcional al error); además, la puntuación va surgiendo en función del desempeño (cuanto más cerca de la solución, más puntuación, claro) y tiene como máximo la suma de los valores absolutos de los desvíos de los datos originales en relación a su media. El juego termina en la cuarta etapa.

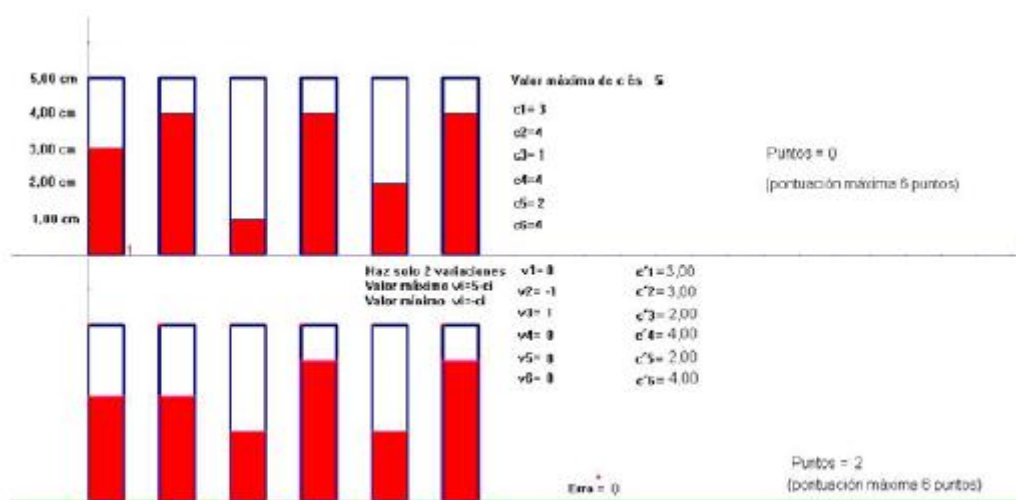


Figura 2: Etapa 2 del juego

Es aún necesario introducir un sistema de aviso de errores cuando los niños hagan un “lleno negativo” del recipiente ó un “lleno excesivo” de más de 5 unidades.

Este juego sencillo permite, así, la simulación de una experiencia real, pero con un más fácil control de las cuestiones de medición, cuyo resultado pretendido implícito

es precisamente el valor de la media aritmética. Con el es posible crear una situación donde, de forma cooperativa, se pueden poner en confronto varias estrategias y experimentaciones, y dar más un paso para la construcción del concepto de media por parte de los niños, bien como crear en ellos la consciencia del tipo de problema en que hace sentido el uso de esta medida estadística. Todavía, el uso de números negativos puede ser problemática, exigiendo toda la atención y ayuda del profesor para encuadrar esta cuestión.

OTRAS APLICACIONES PARA LA MEDIA

La suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero. Resulta entonces que, físicamente, la media aritmética puede ser interpretada como la abcisa (x) del centro de gravedad del sistema formado por los puntos x_1, x_2, \dots, x_n con pesos unitarios.

Basado en estas relaciones entre la media, la física y la geometría, se puede construir una aplicación con dos componentes, que están ínter ligados, y que se explicarán sucintamente a continuación (ver figura 3). Sin pérdida de generalidad, en una recta están colocados siete puntos, x_1, x_2, \dots, x_n , con frecuencia unitaria, y está también colocado el punto M que puede ser movido a lo largo de la recta. Al mover el punto M se observa en la pantalla el valor, v_{suma} , de la medida del vector suma de los vectores con origen en el punto M y la otra extremidad en cada uno de los puntos, x_1, x_2, \dots, x_n . Entonces, se puede procurar, de forma dinámica, la media moviendo el punto M a lo largo de la recta de forma a que el valor v_{suma} pase a ser nulo. Por otro lado, es visible una “balanza” en que la recta, donde están los puntos, sirve de platos de la balanza y el punto M sirve de fiel de la balanza, de tal manera que ésta está en equilibrio cuando M coincide con la media, y se queda proporcionalmente desequilibrada a la vez que M se aleja de la media. Por fin, la aplicación, incluye el cálculo de la media aritmética, permitiendo que se haga una confirmación analítica del valor.

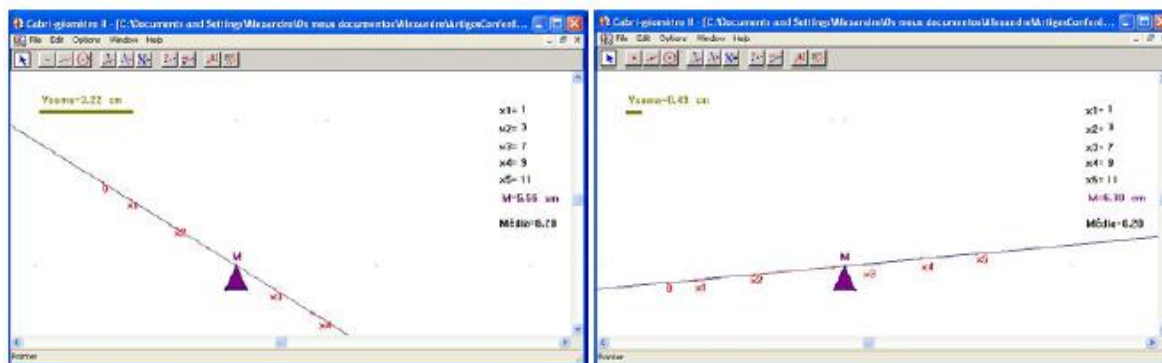


Figura 3: Media en la balanza

Otras posibilidades pasan por incluir los puntos en una recta fija, con frecuencias unitarias ó no necesariamente unitarias, y crear una balanza que represente la situación de equilibrio cuando un punto M coincide con la media, y se quede proporcionalmente desequilibrada a la vez que M se aleje del valor de la media. La visualización de lo que se acabó de referir puede ser hecha en las figuras siguientes.

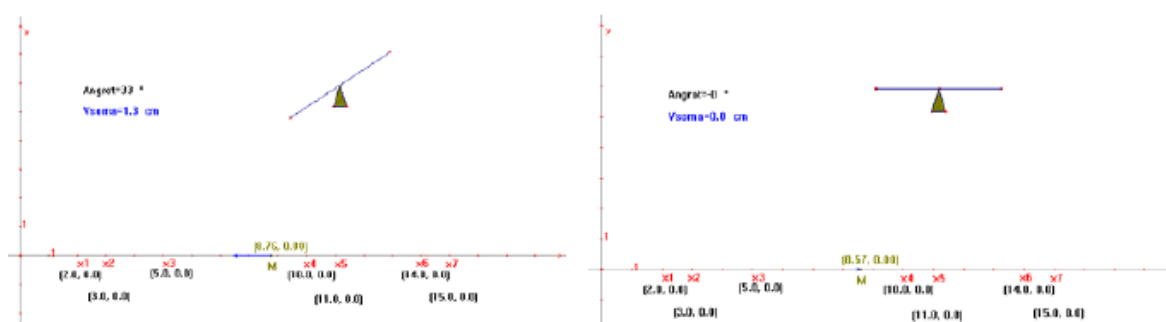


Figura 4: Media (frecuencias unitarias) y balanza

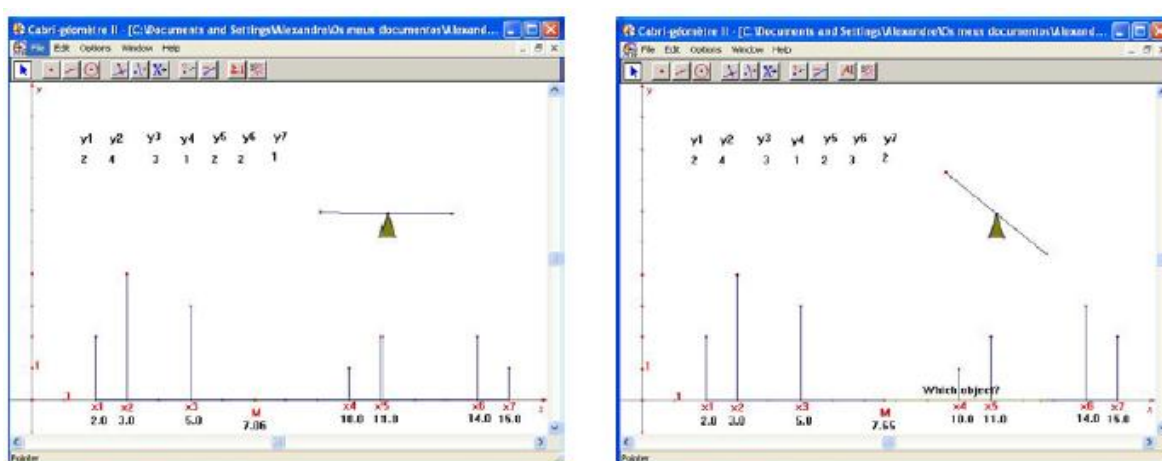


Figura 5: Media (frecuencias no unitarias) y balanza

Por fin, también se creó una aplicación para el caso de los datos continuos, simulando un histograma y con el mismo abordaje usado en las aplicaciones anteriores, tal como se puede observar en la figura 6.

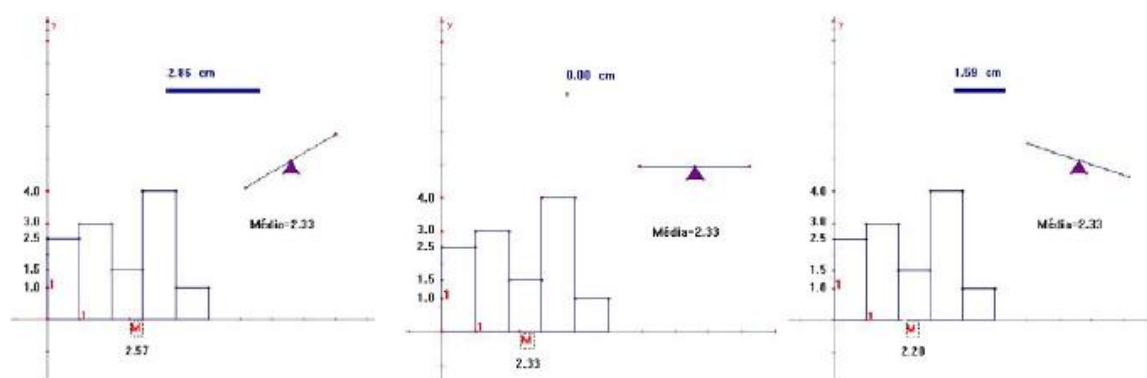


Figura 6: Media y balanza (datos continuos)

Estas aplicaciones permiten explorar de forma dinámica el concepto de media aritmética para varios tipos de datos, bien como sus propiedades, en particular las siete referidas por Batanero *et al.* (1994). Estas deben ser utilizadas con niños de los 10 a 12 años, conduciéndolos hacia la descubierta de las relaciones y propiedades mencionadas. También aquí, el papel del profesor es crucial para tornar estos recursos eficaces.

CONCLUSIÓN

Las aplicaciones presentadas, que cualquier persona con conocimientos mínimos de Cabri-Géomètre consigue implementar, tendrán cumplido sus objetivos iniciales si, a través del potencial de la geometría dinámica, posan ser considerados como ejemplos versátiles, capaces de estimular y facilitar la asimilación, la interpretación y la comprensión de la media aritmética, promoviendo una mayor interactividad en el ambiente de clase.

Hay, con certeza, innumerables posibilidades de exploración de estas aplicaciones pudiéndose profundizarlas, perfeccionarlas y/o añadirles otras potencialidades, teniendo como motivación la curiosidad, la imaginación, la reflexión y la voluntad!

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C., Godino, J., Green, D., Holmes, P. and Vallecillos, A. (1994). *Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 25(4), 527-547.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. UNO, 25, pp. 41-58.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada, España: Dep. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Carvalho, C. (2006). *Desafios à educação estatística*. Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística – Ensino e Aprendizagem da Estatística, Outono de 2006, 7-9.

Darius, P., Michiels, S. y Raeymaekers, B. (2002). *Applets for Experimenting with Statistical Concepts*. ICOTS 6, South Africa.

Godino, J., Ruiz, F., Roa, R., Pareja, J. y Recio, A. (2003). *Analysis of Two Internet Interactive Applets for Teaching Statistics in Schools*. En Gokhan Aydynly, Wolfgang Hardle, Bernd Ronz (Ed.), *Proceedings of the IASE Satellite Conference Statistics Education and the Internet (pp. 1-10)*. Berlin, Alemania:[s.n.]

Guzmán, M. (2001). *El rincón de la pizarra – ensayos de visualización en análisis matemático – elementos básicos del análisis*. Colección “Ciencia Hoy”. Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. (2003). Documento-Marco: “La integración del Sistema Universitario Español en el Espacio Europeo de Educación Superior”. Madrid, España: Autor.

Ponte, J., Fonseca, H. (2000). *A estatística e as probabilidades no currículo*. En Loureiro, C., F. Oliveira e L. Brunheira(Ed.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística*, (1a. ed. , pp 179-194). Lisboa, Portugal: SPE, APM e Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.