CONOCIENDO A ESCHER A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

Rocío Uicab Ballote

uballote@uady.mx

Facultad de Matemáticas. UADY. MÉXICO

RESUMEN

Mauritus Cornelius Escher (1898-1972), dibujante y grabador holandés, realizó un trabajo de arte, único y fascinante que explora y exhibe un amplio rango de ideas matemáticas. Su trabajo fue desapercibido hasta 1950, pero en 1956 realizó su primera exhibición importante, que fue publicado en la revista Time y adquirió una reputación mundial. Escher no poseía estudios matemáticos extensos ni completos, y curiosamente entre sus grandes admiradores se encuentran matemáticos, quienes reconocen en su trabajo una extraordinaria visualización de principios matemáticos. La parte fundamental de la obra de Escher la constituye la división regular del plano y es, de alguna manera, la característica principal de la mayoría de sus obras. La división regular del plano en figuras congruentes que evoquen en el observador una asociación con un objeto natural familiar, es uno de esos problemas que generan pasión. Una de estas creaciones, los teselados, constituyen un buen punto de partida para la introducción y la aplicación de los movimientos del plano (Cafferata y Mamani, 2002). Los principios que dan origen a las teselaciones, son tres principios básicos de la Geometría: la traslación, la rotación y la reflexión (o simetría). La enseñanza de estos principios, puede ser presentada a los estudiantes a través de actividades que se desarrollen con el uso del software Cabri-Géomètre II Plus, estimulando la creatividad en los estudiantes y motivándolos con el trabajo de Escher.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son objeto de estudio de investigadores, educadores y estudiosos interesados en saber cómo aprenden matemáticas los individuos. Los profesores buscan mejorar las habilidades de comprensión de los estudiantes a través de estrategias que orienten un adecuado aprendizaje. El desarrollo de las Tecnologías de Información y Comunicación (TICs) abre áreas de oportunidad para la puesta en escena de nuevas estrategias, en la que el aprendiz juega un rol muy activo, permitiéndole así, construir gran parte de su conocimiento.

El presente trabajo expone algunos ejemplos de diseños de teselaciones artísticas hechas con el software Cabri-Géomètre II Plus. Una teselación tiene varios significados que aterrizan en una idea central, la de cubrir el plano con figuras, de tal forma que éstas no se sobrepongan y además que no queden huecos en el plano sin cubrir. Desglosando el plano en figuras de pájaros, peces, reptiles y figuras humanas, como en un rompecabezas, Escher ha logrado incorporar muchas de sus divisiones del plano en composiciones memorables.

Figura 1. Algunas de las obras de Escher, en donde se aprecia el arte de teselado

Por otro lado, entre la gran colección de softwares didácticos que aparecieron desde la década pasada, ciertamente los softwares geométricos tomaron una posición relevante, tal que, muchos proyectos de investigación se dedicaron a estudiar el papel que juegan dichos ambientes en cuanto al dinamismo que éstos proporcionan y que en un ambiente de lápiz y papel es muy difícil de conseguir. Por su parte, la enseñanza de la Geometría se vio favorecida ante este hecho, resaltando las cualidades formativas que posee esta ciencia, ya que permite trabajar a partir de objetos concretos, hasta llegar a diferentes niveles de conceptualización. Es sabido que desde muy temprana edad, el ser humano, toma posesión de lo que lo rodea, a través de la orientación, el análisis de la forma, la búsqueda de relaciones entre objetos que encuentra a su alrededor, mediante la experimentación con las formas y los movimientos en el espacio. Una de las funciones de la escuela debe ser continuar dicho proceso (Cafferata y Mamani, 2002).

ANTECEDENTES

El estudio, diseño y elaboración de estas teselaciones, es el inicio de un trabajo que pretendo desarrollar, bajo marcos de referencia propios de la didáctica de las matemáticas y las TICs. El interés por la obra de Escher, surge desde mi infancia (en 1984), cuando en uno de los libros de primaria encontré un dibujo que capturó mi atención y el cual ilusamente pensé que podría reproducir a mano alzada. Este dibujo recibe el nombre de *Jinetes* (realizado con la técnica de la xilografía en 1946, por Escher), esta información la supe muchos años después, cuando motivada también por las matemáticas, en particular por la Geometría, me encontré con varios dibujos que tenían las mismas características de *Jinetes*, y me di a la tarea de investigar sobre el creador de ese arte matemático.

A pesar de haber concluido mis estudios universitarios (en particular en la Enseñanza de las Matemáticas y en donde aprendí temas de Geometría de mayor complejidad comparados mis estudios básicos) no podía identificar a simple vista qué es lo que había hecho Escher para construir sus teselaciones. Conjeturé algunas ideas, pero éstas fueron erróneas; no me quedaba más remedio que seguir investigando, hasta descubrir la magia que hacía posible la construcción de esas creaciones artísticas. Y así, finalmente un día, como sucedió con Arquímedes, exclamé "Eureka" al encadenar toda la información que había leído y que me llevó a comprender la esencia de dichos dibujos. Y se fusionaron entonces, la información estudiada, mis conocimientos de Geometría, el manejo del software Cabri-Géomètre y mi interés por reproducir una teselación de Escher, para finalmente, después de tantos años, construir *Jinetes* (Figuras 2 y 3).

Figura 2. Jinetes. Xilografía. Escher (1946)

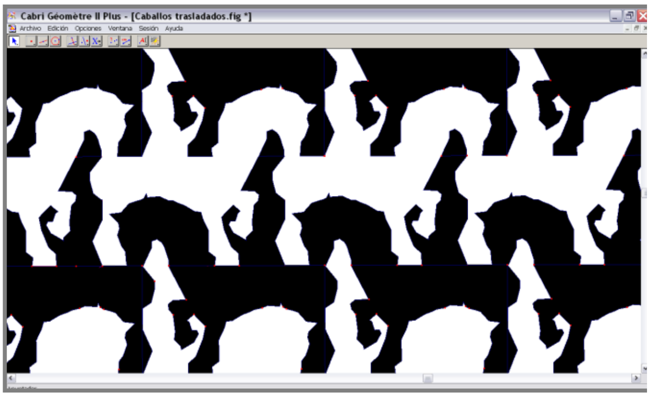

Figura 3. Jinetes. Cabri-Géomètre II. Uicab (2006)

La experiencia narrada en los párrafos anteriores, me lleva a apreciar un aspecto central:

La ausencia de conexiones que tuvieron algunos conceptos de Geometría durante mis estudios básicos y posteriormente la articulación de éstas, esa conjunción de conocimientos, habilidades y actitudes, me condujeron a la solución adecuada.

Considerando esta reflexión, en la actualidad estoy trabajando con la reproducción de otras obras de Escher y también al estudio de objetos de aprendizaje para posteriormente diseñar actividades didácticas para el aprendizaje de tres principios básicos de la Geometría: traslación, rotación y simetría, los cuales son el eje central para generar las teselaciones. Los elementos que se contemplarán para el diseño de dichas actividades, dirigidas en particular a estudiantes del nivel básico, comprenderán:

a) El uso del software Cabri-Géomètre II Plus, como medio de aprendizaje, donde los estudiantes puedan experimentar, observar las propiedades geométricas y establecer o verificar conjeturas de manera más sencilla que en el ambiente de papel y lápiz.
b) Llevar al estudiante progresivamente a la construcción de una red de conceptos y procedimientos, y al dominio del lenguaje matemático, en consonancia con el conocimiento matemático objetivo. Aquí destacaría la importancia de la construcción de las teselaciones de Escher, que pongan al estudiante a reflexionar y recurrir a sus conceptos previamente adquiridos, efectuando así, las conexiones válidas que lo conduzcan a la construcción de dichas teselaciones (las cuales no son inmediatas, por la naturaleza de la obra de Escher).
c) La importancia de contar con marcos de referencia que sustenten el diseño de estas secuencias. De forma a priori, se contemplarán actividades que permitan la acción, la formulación, la validación y la institucionalización (*Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau*).

LA GEOMETRÍA COMO CUERPO DE CONOCIMIENTOS

La Geometría como cuerpo de conocimientos permite analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales, que favorecen la comprensión y admiración por el entorno natural.

De acuerdo con varias versiones, la Geometría fue primeramente descubierta en Egipto, teniendo su origen en la medición de áreas, ya que ésta era una necesidad para los egipcios, debido a que el Nilo al desbordarse, barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada dueño. Una visión geométrica tiene su origen en el desarrollo, que a lo largo de los primeros años de vida de todo individuo, lleva a cabo la percepción de las formas, hasta llegar a la formación de conceptos de naturaleza geométrica (como la distinción entre curvas cerradas y abiertas, etc.), para pasar más adelante, a distinguir propiedades de mayor índole métrica (como la diferenciación entre un ángulo recto y uno agudo, etc.). Estos conceptos se adquieren de manera espontánea y sin necesidad de que nadie los enseñe (Filloy, 1998).

LA GEOMETRÍA EN EL ARTE

Dentro de ese entorno natural, podemos señalar que todas las culturas han utilizado simetrías, traslaciones y giros en sus manifestaciones artísticas. Han jugado, casi siempre con sorprendentes resultados estéticos, con los movimientos en el plano. Esos movimientos en el plano se hacen arte en los frisos y sobre todo en los mosaicos que rellenan el plano (Cafferata y Mamani, 2002). Las teselaciones han sido usadas desde la antigüedad para recubrir suelos y paredes, e igualmente como motivos decorativos de alfombras, tapices, muebles, etc. La palabra teselación deriva de "tesel" o "tesela" que tiene varias acepciones (Collarte, 2002):

- Cada una de las piezas de mármol, piedra, etc. con que los antiguos formaban los pavimentos de mosaico.
- Pavimento, mosaico, embaldosado. Poner azulejos.
- Cubrimiento de planchas o baldosas.

En esencia, la intención es cubrir un plano (suponiéndolo finito) con figuras, sin dejar huecos y sin que se superpongan unas con otras. Para realizar una teselación hay que considerar propiedades de las figuras, así como ciertas transformaciones geométricas.

Típicamente, las figuras que conforman una teselación son polígonos o figuras regulares, como los azulejos cuadrados que son usados con frecuencia en los pisos. Escher, sin embargo, estuvo fascinado por todo tipo de teselación –regular e irregular- más aún, de aquellas que denominó "metamorfosis", teselaciones en donde las figuras cambian e interaccionan unas con otras, y algunas veces se rompen libremente en el mismo plano.

LAS TICS EN LA EDUCACIÓN

En el escenario educativo, las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TICs), entre ellos la computadora, internet y sus materiales de aprendizajes (virtual y digital como software educativo), pueden organizarse en buenos aportes para una pedagogía activa y de aprendizaje de constructos significativos. La tecnología debe ser usada como un medio para que el construir y el aprender sean visibles.

La visualización en matemáticas es el proceso de formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con el apoyo de herramientas tecnológicas. El aprender a usar la visualización ayuda efectivamente a descubrir conceptos matemáticos y a comprenderlos (Lastra, 2005).

La visualización es saber ver, y la intuición es el centro que permite la construcción de las relaciones espaciales, y que para que éstas sean ciertas se requiere del análisis deductivo lógico, así se podrá expresar y comunicar, a través del lenguaje.

De acuerdo con Lastra (2005) el proceso de aprendizaje del estudiante debe basarse en una actividad enriquecedora y creativa que le permita realizar descubrimientos personales. El profesor en este proceso debe ser un guía, animador central de esta etapa. Aprender es crear, inventar, descubrir y el estudiante aprende cuando logra integrar en su estructura lógica y cognoscitiva los datos que surgen de la realidad exterior, en un proceso personal, de exploración, avances y retrocesos, que el profesor puede orientar con actividades didácticas más adecuadas para el momento, más cercanas a sus intereses y motivaciones. Conocer cómo se desarrolla el aprendizaje, está ligado a cómo se accede al conocimiento. La posición epistemológica de Piaget (citado en Lastra, 2005) considera que la adquisición de un concepto se logra como un resultado de la interacción con la realidad. Al entrar en contacto con el objeto se incorpora un conocimiento de tipo físico que reúne las propiedades de los objetos, que resulta de la acción directa con él.

En particular, en el estudio de la Geometría, la adquisición de destrezas y habilidades de percepción visual pueden ser potenciadas, por la misma naturaleza de dicha ciencia.

EL SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE II PLUS

Cabri-Géomètre II Plus es un paquete de cómputo de Geometría Dinámica interactiva en tiempo real. Permite hacer la Geometría de una manera muy particular: el usuario puede animar una figura desplazándola o deformándola y el resultado se presentará inmediatamente en la pantalla de la computadora. Esta libertad de movimiento permite rebasar los límites impuestos por el lápiz y papel de la Geometría tradicional (Díaz Barriga, 2006). Además Cabri-Géomètre II Plus es un paquete de cómputo muy intuitivo y al mismo tiempo esto lo hace un medio muy potente para la enseñanza, aprendizaje y la investigación.

Ya desde tiempos griegos, los métodos cinemáticos se encontraban implícitos en el estudio de una gran gama de figuras estáticas. Y sin embargo las figuras se mueven realmente hasta hoy con el surgimiento de la Geometría Dinámica.

Teselando el plano con Cabri- Géomètre II

"Teselar" el plano con Cabri-Géomètre II Plus significa que el estudiante pueda construir figuras, obteniendo de esta manera un aprendizaje por exploración, elaboración de conjeturas o haciendo gala de su creatividad e ingenio generando figuras de su interés. Además el dinamismo de Cabri-Géomètre II Plus permite generar varias imágenes en cuestión de minutos. Asimismo, en esta versión plus, en donde es posible insertar imágenes, podemos reproducir teselaciones, las cuales son un poco complicadas de construir.

Sin embargo a pesar de que el software nos brinda la facilidad de construir de manera dinámica y atractiva ciertos patrones de teselación, es necesario conocer los tres principios geométricos básicos que necesitamos para construir las teselaciones. Dichos principios básicos son:

a) Traslación. Movimiento de los puntos de un cuerpo bajo la dirección de un vector (Figura 4).

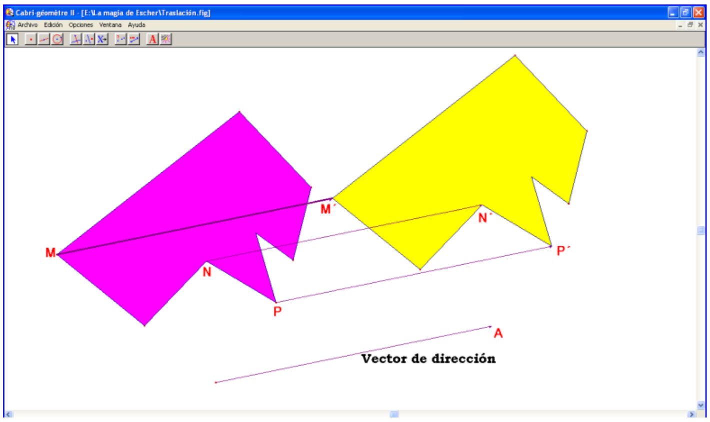

Figura 4. Ejemplo de un polígono trasladado bajo la dirección del vector A

b) Rotación. Movimiento de un cuerpo en el que todos sus puntos describen circunferencias cuyos centros están en una misma línea llamada eje de rotación (Figura 5).

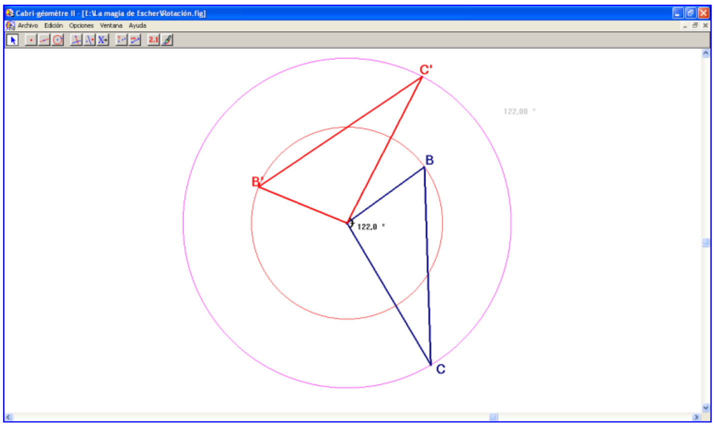

Figura 5. Ejemplo de un polígono rotado 122°

c) Simetría. Correspondencia de puntos de un cuerpo a otro a través de un plano o línea (Figura 6).

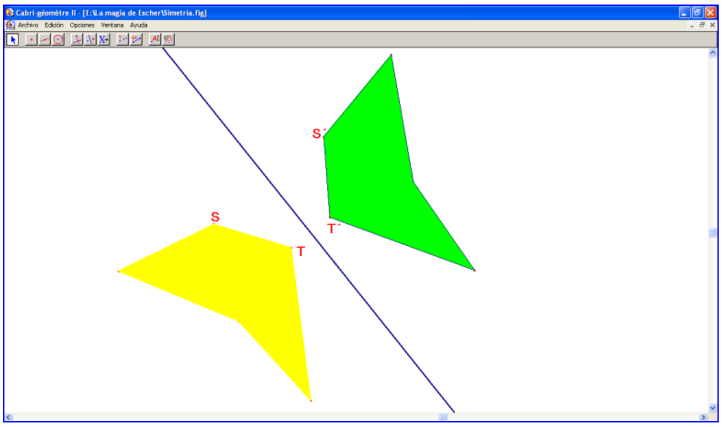

Figura 6. Ejemplo de un polígono bajo una transformación simétrica

Algunas teselaciones hechas con Cabri-Géomètre II Plus

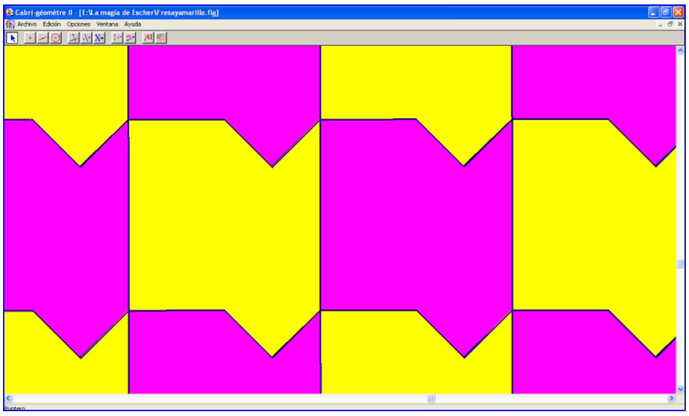

Figura 7. Ejemplo de una teselación donde se aprecia el principio de traslación

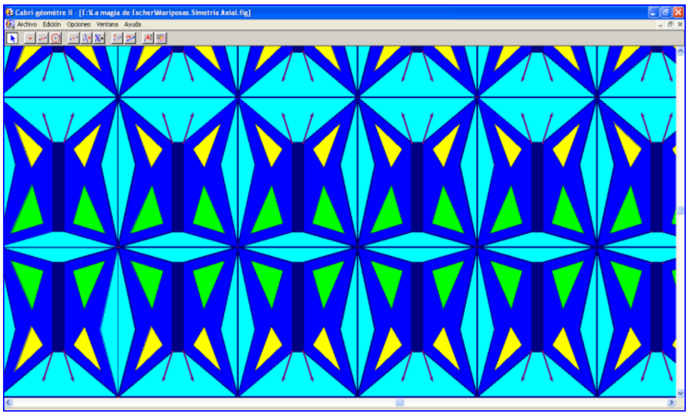

Figura 8. Ejemplo de una teselación donde se aprecia el principio de simetría

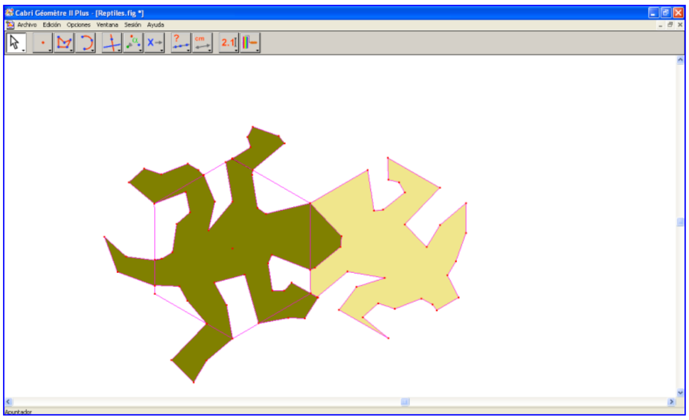

Figura 9. Construyendo una teselación de Escher

CONCLUSIONES

Es importante considerar dentro de la enseñanza actividades novedosas que permitan a los estudiantes poner en juego su conocimiento adquirido, donde diferentes conceptos deban vincularse para una solución adecuada. La motivación de un pensamiento conectivo en los estudiantes debe ser un tema que preocupe a profesores e investigadores, sobre todo en las ramas de las matemáticas donde se estudian muchos conceptos abstractos, lo que da lugar a su algoritmización para un manejo más fácil por parte de profesores y estudiantes.

Ubicándonos dentro de la Geometría podríamos sugerir que su enseñanza contemple estrategias que permitan combinar aspectos intuitivos y analíticos de los conceptos, cuidando el aspecto formal y organizando el contenido de tal manera que los conceptos previos conduzcan a la adquisición de los conceptos posteriores. En particular, en el aprendizaje de las teselaciones es importante hacer hincapié en el aspecto intuitivo por un lado, y por otro lado atender el aspecto formal considerando los principios básicos que argumentan su construcción.

BIBLIOGRAFÍA

Cafferata, S. & Mamani, R. (2002). *Mosaicos o teselados*. Extraído el 20 de marzo de 2007. Disponible en http://www.geocities.com/edumatematica2002/tesel01.htm.

Collarte, M. *Teselaciones* (2002). Memorias – I Congreso Iberoamericano de Cabri. Iberocabri 2002, Chile. Extraído el 12 de febrero de 2008. Disponible en http://www.iberocabri.org/memorias2002.htm.

Díaz Barriga, E. (2006). *Geometría Dinámica con Cabri-Géomètre*. Toluca, Estado de México, México. Editorial Kali. Año 2006.

Filloy, E. (1998). Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana. Colección: Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. México, D.F. Grupo Editorial Iberoamericana.

Lastra, S. (2005). Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas. Santiago, Chile. Tesis de maestría.