COMO RENÉ DESCARTES TERIA DESENVOLVIDO A GEOMETRIA ANALÍTICA SE CONHECESSE O CABRI E A GEOMETRIA HIPERBÓLICA?

(1) Laurito Miranda Alves – (2) Marcelo Vasconcelos Ladeira –

(3) Maria Fernanda de Souza Castro – (4) Raquel Indiane Araújo

(1) lauritoalves@uol.com.br – (2) marcelovladeira@yahoo.com.br –

(3) mariafernanda.castro@hotmail.com – (4) quelindiane@yahoo.com.br

Centro Universitário de Belo Horizonte / UNI-BH. BRASIL

RESUMEN

Neste trabalho apresentamos, inicialmente, os conceitos básicos da Geometria Hiperbólica, principalmente os conceitos de ponto, reta e plano. A seguir, partindo da idéia de que Descartes conhecia a Geometria Hiperbólica e não a Geometria Euclidiana, mostraremos como seria definida a Geometria Analítica. Daremos enfoque à criação do conceito de coordenada de um ponto, mostrando como as idéias euclidianas não se aplicam ao caso hiperbólico. Adaptando os conceitos desenvolvidos por Descartes no plano euclidiano ao plano hiperbólico, construímos o "papel milimetrado" hiperbólico e mostramos como podemos utilizá-lo para construir gráficos de funções reais. Finalmente, construiremos no plano hiperbólico os gráficos das funções de primeiro e segundo graus – mostrando que elas não correspondem aos conceitos de reta e parábola – funções polinomiais de grau maior que dois, funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Este trabalho pretende desenvolver a Geometria Analítica Hiperbólica. Para tal precisamos, inicialmente, conhecer um pouco essa outra Geometria.

Em aproximadamente 300 a.C., Euclides de Alexandria publicou "Os Elementos", livro que pretendia mostrar, de forma rigorosa, grande parte da Matemática conhecida até então. Para realizar essa tarefa, Euclides baseou-se em 5 axiomas e 5 postulados. Infelizmente para Euclides, e felizmente para a Matemática, o 5º postulado destacou-se dos demais por não ser considerado auto-evidente. Dizia Euclides em seu 5º postulado: "Se uma reta cortar outras duas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor que dois retos então as duas retas, se prolongadas, encontrar-se-ão no mesmo lado que a soma dos ângulos é menor que dois retos".

Desde os primeiros comentaristas do trabalho de Euclides fica clara a insatisfação com esse Postulado e várias tentativas de demonstrá-lo a partir dos axiomas e postulados anteriores foram feitas por matemáticos ao longo do tempo. Todas as tentativas de demonstração mostraram-se erradas e o problema ficou em aberto. A Geometria Hiperbólica surge quando, a partir do século XVIII, alguns matemáticos tentaram mostrar o Postulado das Paralelas de Euclides usando o método de redução ao absurdo. Assim, foi colocado que por um ponto fora de uma reta passam duas retas paralelas distintas à reta dada e, a partir da dedução de resultados, tentou-se chegar a um absurdo, que não ocorreu.

No início do século XIX, Bolay e Lobatchvisky publicam os primeiros trabalhos em que se considera que não ocorrerá um absurdo. Essa premissa transforma a questão, pois o trabalho passa não mais a ser buscar uma incongruência, mas deduzir resultados em um novo campo da Matemática.Restava, porém, sempre o medo de se chegar ao absurdo que tantos procuravam, o que faria com que todo o campo de pesquisa fosse inviabilizado. No final desse mesmo século, trabalhos de Riemman, Poincaré e alguns outros mostraram que essa nova Geometria era tão consistente quanto a Geometria Euclidiana, encerrando a questão. Nasciam, oficialmente, as Geometrias Não Euclidianas, sendo a Geometria Hiperbólica a primeira delas.

Assim, em resumo, a Geometria Hiperbólica é a Geometria obtida a partir da Geometria Euclidiana usual trocando o postulado das paralelas por este novo postulado:

Postulado das Paralelas: Por um ponto P fora de uma reta r passam duas retas distintas paralelas à reta dada.

Essa mudança torna falso todos os resultados obtidos pela Geometria Euclidiana que utilizam-se do postulado das paralelas em sua demonstração. Por exemplo, deixam de ser válidos na Geometria Hiperbólica os seguintes resultados:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.
- As alturas de um triângulo se encontram em um ponto chamado de ortocentro do triângulo.
- Retas paralelas são eqüidistantes

- Dado um ponto P e uma reta r, existe uma única perpendicular a r que passa por P.
- Dado um número positivo qualquer k, existe um triângulo cuja área é k.

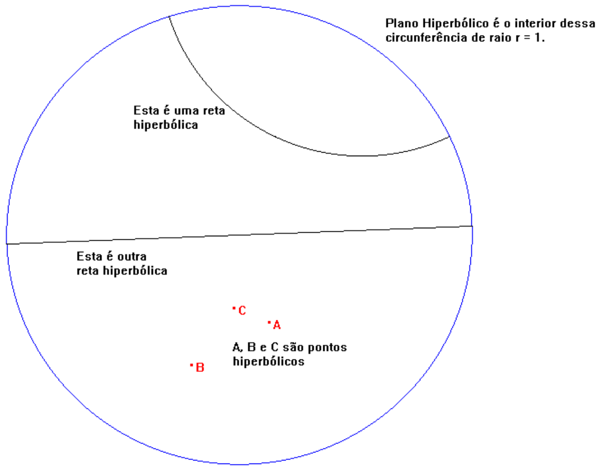
Nem tudo, porém, é novo. Todos os resultados da Geometria Euclidiana que não usam o postulado das paralelas nem suas conseqüências em sua demonstração continuam válidos. Por exemplo, os seguintes resultados são válidos tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Hiperbólica:

- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.
- Em um triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e, reciprocamente, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.
- Um ângulo externo é maior que qualquer um dos outros dois ângulos internos de um triângulo.
- Todos os casos de congruência de triângulo.

Resta, ainda, uma questão a ser abordada: como representar os elementos dessa nova Geometria ? Essa questão é importante posto que as figuras usuais de ponto, reta e plano não são capazes de representar o novo postulado das paralelas. As próprias figuras euclidianas são usadas para definir o que são os pontos, as retas e o plano hiperbólico. Usaremos, nesse trabalho, o modelo do disco unitário:

- Chamamos de Plano Hiperbólico ao interior de um disco euclidiano unitário.
- Chamamos de retas hiperbólicas ao interior dos diâmetros do disco euclidiano unitário ou arcos de circunferência contidos no disco euclidiano unitário que são ortogonais a ele.
- Chamamos de pontos hiperbólicos os pontos euclidianos no interior do disco unitário.

Só para tornar mais claro o conceito de reta hiperbólica, dizemos que dois círculos são ortogonais quando, nos pontos comuns a eles, as retas tangentes são perpendiculares. A figura abaixo ilustra os conceitos de Plano Hiperbólico, reta hiperbólica e ponto hiperbólico.



Para calcular a distância entre dois pontos A e B nesse modelo devemos fazer o seguinte procedimento:

- Determinar a reta que passa por A e B (arco de circunferência ou diâmetro) e sua interseção euclidiana com o disco unitário, que chamaremos de pontos P e Q.
- Determinar as distâncias euclidianas de AP, AQ, BP e BQ.
- A distância hiperbólica d entre A e B é $d = \ln\left|\dfrac{\frac{AP}{AQ}}{\frac{BP}{BQ}}\right| = \ln\left|\dfrac{AP.BQ}{AQ.BP}\right|$.

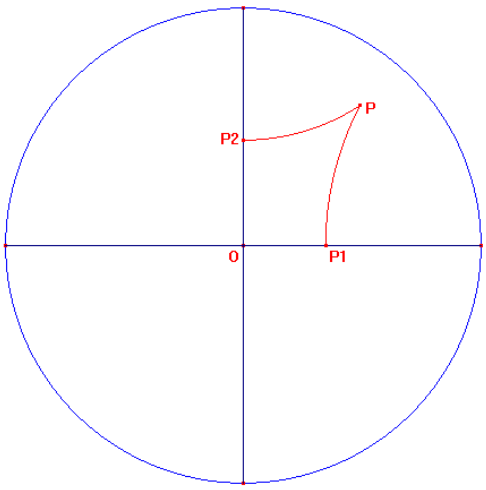
A demonstração do resultado anterior é muito avançada e foge ao nível deste trabalho. Ela pode ser encontrada em [2].

DESCARTES E A GEOMETRIA ANALÍTICA

Diz-se que Descartes estava em uma barraca de campanha do Exército de Maurício de Nassau, deitado em sua cama, quando viu uma mosca pousada na lona da barraca. Isso fez com que o francês se perguntasse: como posso representar matematicamente a posição desta mosca na barraca ? Ele então desenvolve, a partir desse problema, a Geometria Analítica. Não se sabe até que ponto essa história é verdadeira ou é um mito, mas, com certeza, a Geometria Analítica mudou o modo como era vista a Geometria.

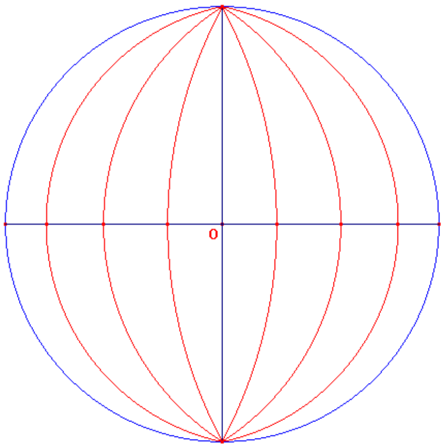
O que ocorreria se Descartes fosse desenvolver a Geometria Analítica usando não a Geometria Euclidiana, mas a Geometria Hiperbólica ?

Inicialmente, os dois eixos cartesianos perpendiculares seriam dois diâmetros euclidianos, fazendo com que a origem O seja o centro euclidiano do disco unitário. Dado um ponto P do plano, Descartes traçou as perpendiculares aos eixos que passam por P, determinando os pontos P1 e P2. O que chamar de abscissa do ponto P, a distância PP_2 ou a distância OP_1 ? Essa seria a primeira decisão que Descartes deveria ter tomado pois as distâncias são diferentes.

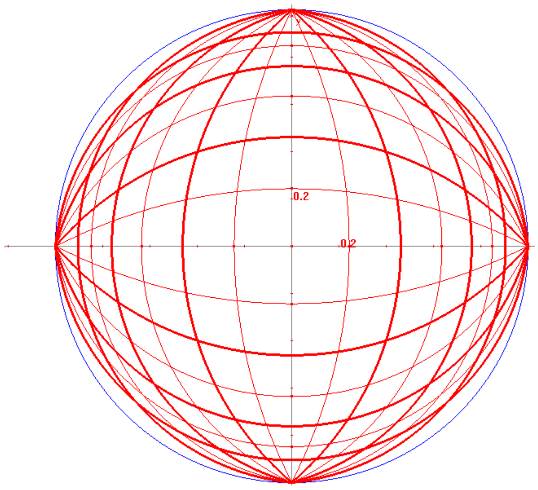


Para manter a correspondência biunívoca entre os pontos do plano hiperbólico e os pares ordenados de números reais, Descartes deveria escolher que a abscissa de P é a distância entre P e P_2 e a ordenada de P é a distância entre P e P_1.

Resta saber, quais são os pontos do plano com mesma abscissa ? No caso euclidiano é uma reta perpendicular ao eixo x, mas isso não ocorre na Geometria Hiperbólica. Na realidade, os pontos que mantém uma mesma abscissa no plano hiperbólico descrevem uma curva que não é uma reta. Felizmente, sua representação euclidiana é muito simples. O conjunto de todos os pontos do plano com uma mesma abscissa pertencem a um arco de circunferência euclidiana que passa pela interseção euclidiana do eixo y com o disco unitário. Assim, na próxima ilustração, pontos sobre um mesmo arco possuem mesma abscissa.



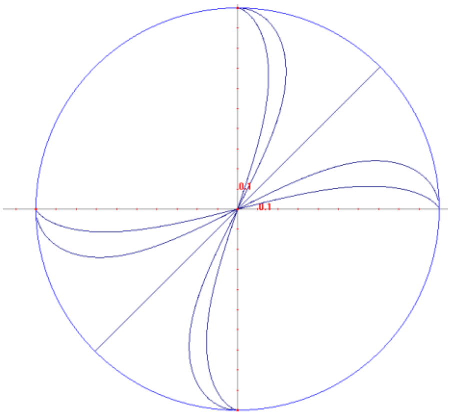
Com isso, podemos construir um “papel milimetrado” hiperbólico, que teria o seguinte formato:



Deixamos em destaque os arcos correspondentes a -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3. Com isso, podemos construir os gráficos de funções reais. Basta construir uma tabela reunindo os valores de x e de y = f(x) e marcar esses pontos no plano cartesiano. Para essa tarefa o Cabri mostra-se muito adequado, pois basta marcar um ponto no eixo x, ler suas coordenadas cartesianas, transformá-la em coordenadas hiperbólicas, calcular o valor de f(x), determinar as coordenadas cartesianas desse valor hiperbólico e marcar a imagem de f(x). A seguir, com a ferramenta Lugar Geométrico temos o gráfico da função.

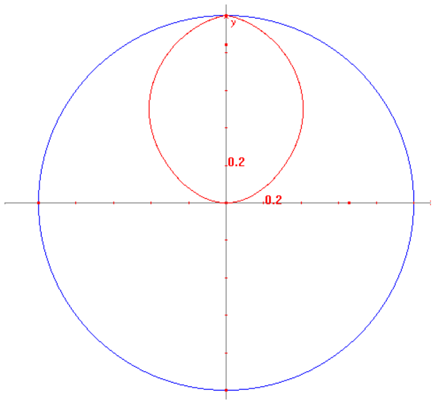
A primeira idéia é representar os gráficos das funções mais elementares: as funções do 1º grau. Observamos na figura abaixo que seu gráfico, em geral, não são retas, mas curvas mais complicadas.

1) Gráficos das funções f(x) = ax, a ∈ {0,25 , 0,5 , 1, 2, 3}



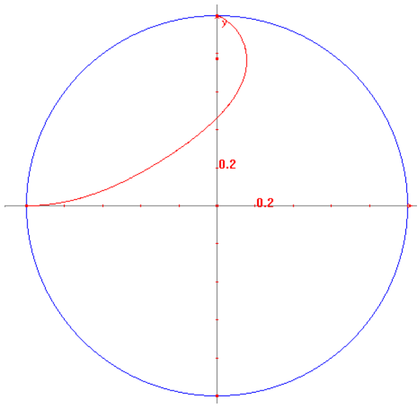
A construção desses gráficos nos força a concluir que apenas as bissetrizes dos quadrantes são retas que se representam por funções do 1º grau. Passamos, a seguir, para as funções do 2º grau.

2) Gráfico da função f(x) = x2.

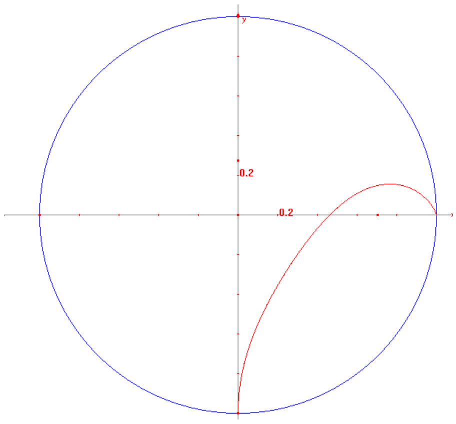


Não temos uma parábola, uma vez que os pontos do gráfico não são eqüidistantes de uma reta e de um ponto. Nesse ponto observamos que nada do que estamos acostumados parece funcionar para gráficos de funções no plano hiperbólico. A seguir, mostramos o gráfico da função exponencial.

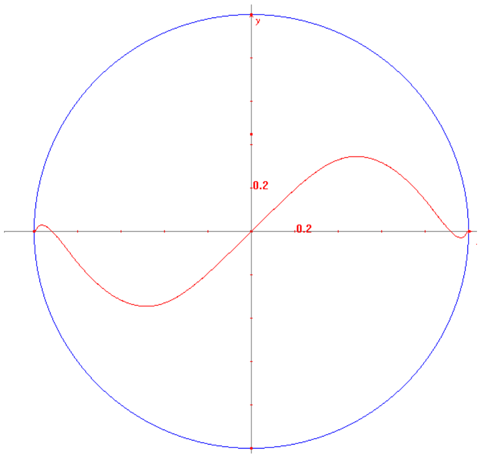
3) Gráfico da função f(x) = ex.



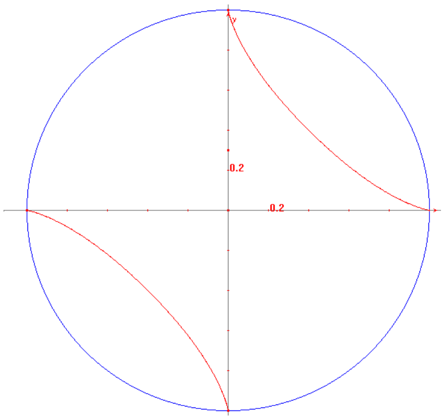
4) Gráfico da função f(x) = ln x (logaritmo natural de x)



5) Gráfico da função f(x) = sen x.



6) Gráfico da função f(x) = $\frac{1}{x}$



BIBLIOGRAFIA:

Bonola, Roberto. *Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover Publications, 1911

Greenberg, Marvin J. *Euclidian and Non-Euclidian Geometries* – Development and History. New Cork: W. H. Freeman Inc., 1993

Rocha, Luiz F. C. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*. Rio de Janeiro: IMPA, 1987