# Y… ¿DÓNDE ESTÁ EL EJE?

**(1) María Susana Dal Maso – (2) Marcela Götte**

**(1)** mdalmaso@fhuc.unl.edu.ar **– (2)** mgotte@fhuc.unl.edu.ar

**Facultad de Humanidades y Ciencias. UNL. ARGENTINA**

## RESUMEN

*En nuestra práctica docente trabajamos con resolución de problemas, el planteo de conjeturas y la validación de las mismas. El uso de un software como Cabri II Plus permite realizar conjeturas, hallar soluciones encontrar caminos para una demostración, descartar otras conjeturas… cuestión difícil de hacer sólo con lápiz y papel. Si bien el sólo uso de un software no garantiza la producción de una prueba puede ayudar a los alumnos a sentir la necesidad por las explicaciones, apreciar la fuerza de la justificación deductiva como una herramienta de explicación, e incluso intentar producir dichas explicaciones. Presentamos en esta ponencia el estudio de un problema algunas de sus posibles derivaciones cuando se trabaja con el Cabrí.*

En nuestra práctica docente trabajamos con resolución de problemas, el planteo de conjeturas y la validación de las mismas. Para ello vemos interesante el uso de un software en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. La representación de una construcción geométrica en un entorno de geometría dinámica tiene dos facetas distintas:

- la representación gráfica de objetos geométricos en la pantalla del ordenador.
- el almacenamiento de las propiedades geométricas que dichos objetos poseen

La primera de ellas, en cuanto a representación gráfica, puede llevarse a cabo en otro contexto: por ejemplo, con lápiz y papel (de forma estática) o grabando a modo de película una secuencia de dibujos (si se quiere añadir movimientos). Sin embargo, la segunda faceta es específica de los ambientes computacionales de geometría dinámica permitiendo enmarcar las representaciones de la geometría dinámica en lo que se denomina representaciones ejecutables, en el sentido de que se pueden ver los objetos matemáticos como manipulables y actuar sobre ellos. Esta cualidad se manifiesta por el *modo de arrastre* que poseen los sistemas de geometría dinámica y que les confieren la cualidad de ser dinámicos. Esta cualidad es la que permite que se aumenten las posibilidades de actuación del usuario sobre los objetos geométricos y, en consecuencia, que se modifiquen las condiciones de las situaciones específicas de enseñanza respecto de otros contextos tradicionales.

Hölzl (1996) analiza la naturaleza del modo arrastre y su posible implicación en las concepciones resultantes en los estudiantes, concluyendo que el arrastre, desde un punto de vista técnico:

- enfatiza la jerarquía de los objetos geométricos.
- pone de manifiesto las relaciones entre dibujo y figura.
- altera el "carácter relacional" de los objetos geométricos, distinguiendo objetos que, desde un punto de vista teórico, son indistinguibles.

Y desde un punto de vista educativo:

- sugiere nuevos estilos de razonamiento,
- favorece la aparición de estrategias dinámicas de resolución de problemas, potenciando el heurístico de Polya "variar los datos del problema",
- potencia la aparición de un nuevo lenguaje entre los estudiantes para comunicar experiencias geométricas, basado en el uso de verbos activos relacionados con el movimiento,
- demanda nuevas habilidades a los estudiantes, relacionadas con las "metaactividades" de controlar los parámetros que intervienen en un experimento y ser capaces de interpretar los resultados.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que adquirir determinados conocimientos geométricos a partir de un dibujo no es un asunto inmediato ni espontáneo y no ocurre sin intervención específica. En este sentido, el uso de software de geometría dinámica podría sugerir la idea errónea de que mostrar un dibujo y "moverlo" es suficiente para que el estudiante deduzca una determinada propiedad geométrica invariante por el movimiento (Laborde, 1998). Pero la simple sustitución de la regla y el compás tradicionales por comandos en un sistema computacional, por más que este introduzca algunas variantes, no es razón suficiente para esperar mejoras en el aprendizaje de la geometría. Así, es fundamental diseñar o seleccionar actividades para los estudiantes, encaminadas a relacionar información geométrica teórica con información observada en un dibujo que se mueve. (Recio, 1999)

Es conocido que el razonamiento deductivo (la demostración) tiene un rol central en el aprendizaje de la geometría tanto para la verificación de propiedades geométricas como para mostrar su universalidad.

“En los tiempos actuales, los esfuerzos de desarrollo e investigación están siendo dirigidos hacia la creación innovadora de ambientes de aprendizaje que aún refieren al razonamiento deductivo como un elemento básico del aprendizaje. Sin embargo, estos ambientes de aprendizaje tratan de tomar en cuenta el punto de vista de los alumnos diseñando situaciones de aprendizaje que ayuden a los alumnos a sentir una necesidad intrínseca por las explicaciones, y consecuentemente hacen la invitación a apreciar la fuerza de la justificación deductiva como una herramienta de explicación, e incluso intentan producirlas.” (Hershkowitz, 2001)

“La herramientas computacionales son puertas de entrada al pensamiento matemático avanzado que implica: explorar, descubrir, conjeturar, buscar ejemplos y contraejemplos, hacer deducciones, justificar, poner a prueba argumentos, y al desarrollo de conceptos matemáticos y geométricos.” (Valencia; Vergel, 2003).

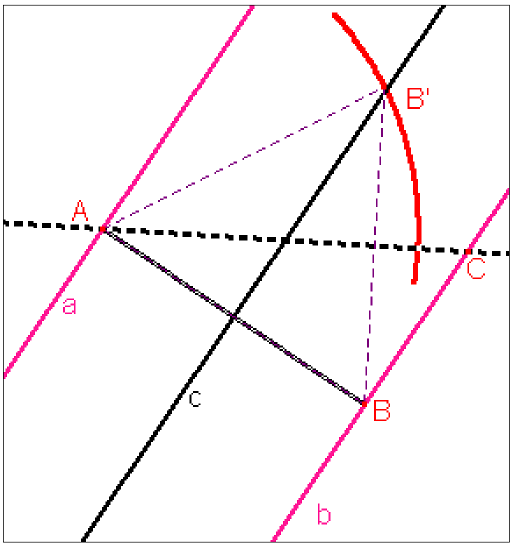
En este trabajo presentamos un problema y analizamos distintas resoluciones.

## ¿CÓMO SURGE ESTE PROBLEMA?

Es bien conocido el procedimiento por el que a través del plegado de una hoja de papel se logra realizar un triángulo equilátero. Se pliega la hoja por su base media, paralela al lado mayor. Se lleva uno de los vértices sobre ese pliegue. De esta forma se obtiene un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 30º y 60º. Dicho triángulo se puede considerar como la mitad de un triángulo equilátero y realizando un nuevo pliegue, obtenemos el triángulo equilátero buscado. De este procedimiento surgió nuestra pregunta: ¿por qué se obtiene un triángulo equilátero? Esta construcción se puede justificar por un procedimiento empírico, superponiendo o midiendo. Pero nuestra pregunta necesitaba una respuesta más formal. De esta justificación surgió este nuevo problema descontextualizado de la hoja de papel:

Sean **a** y **b** rectas paralelas y **c** la paralela media a **a** y **b**. Sean A $\in$ **a** y B $\in$ **b** tal que AB $\perp$ **a**. Hallar C $\in$ **b** tal que $S_{\overline{AC}}(B) = B'$ y B’$\in$ **c**.

**Solución I:** C debe estar en la intersección de la bisectriz del ángulo de 60º, donde uno de sus lados es AB y vértice en A.




Demostración I:

Puesto que $\overleftrightarrow{AC}$ es eje de simetría, BB' es perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$.

$|AB'| = |B'B|$ pues c es mediatriz de AB

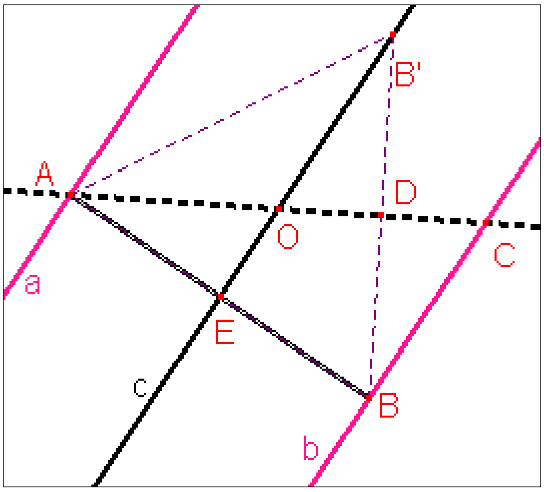
$|AB| = |AB'|$ pues $S_{\overleftrightarrow{AC}}(B) = B'$ y $S_{\overleftrightarrow{AC}}(A) = A$.

Luego $\overset{\Delta}{ABC}$ es equilátero y $B'\overset{\wedge}{A}B$ es de 60º.

Además $\overleftrightarrow{AC}$ es bisectriz de $B'\overset{\wedge}{A}B$ por propiedad de simetría axial.

**Solución II:** C pertenece a b tal que $|BC| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}|AB|$

Demostración II:




Sea D la intersección de AC con BB'. Como $S_{\overleftrightarrow{AC}}(B) = B'$, $|B'D| = |DB|$ y $B'\overset{\wedge}{D}O = B\overset{\wedge}{D}C = 90º$. Además $B'\overset{\wedge}{O}D = D\overset{\wedge}{C}B$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas (c//b cortada por OC) y entonces por criterio de congruencia de triángulo rectángulo, $\overset{\Delta}{ODB'} = \overset{\Delta}{CDB}$ y $|BC| = |OB'|$.

Además $|OB| = |OB'|$ pues O pertenece al eje de simetría y $S_{\overleftrightarrow{AC}}(B) = B'$.

$|OB| = |OA|$ por ser c mediatriz de AB.

$|OC| = |OA|$ pues $\overset{\Delta}{AEO} \approx \overset{\Delta}{ACB}$ por ser triángulos con lados paralelos y $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$.

Así $|BC| = |OB'| = |OB| = |AO| = |OC|$ y por tanto $|BC| = \frac{1}{2}|AC|$.

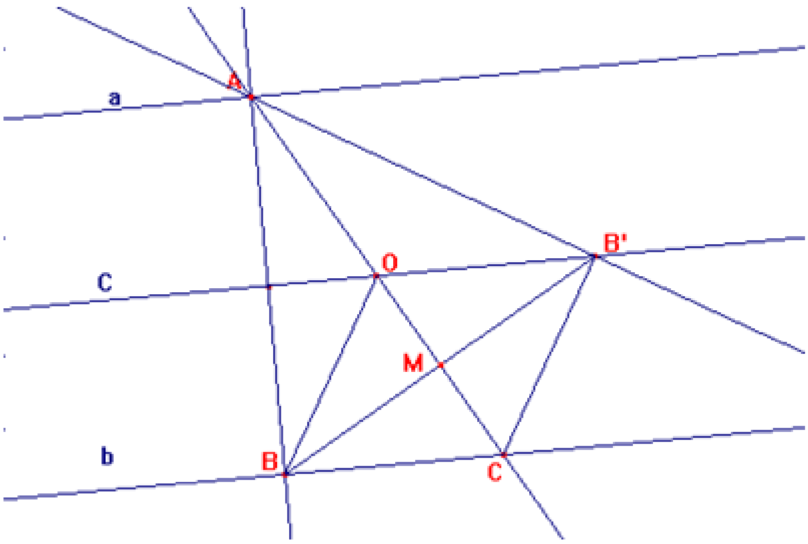
Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $|BC| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AB|$.

**Solución III:** C pertenece a b tal que $2.\overset{\Lambda}{BAC} = \overset{\Lambda}{ACB}$ ( $\overset{\Delta}{ABC}$ es un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30º y 60º)

**Demostración III**: Se desprende de la demostración II aplicando razones trigonométricas.

**Solución IV:** C pertenece a b tal que el ángulo $B\hat{A}C$=30º.

Demostración IV:




$\overline{OB'}$ // $\overline{BC}$ por hipótesis. **(I)**

Como $O\hat{M}B' = B\hat{M}C$ por ser ángulos opuestos por el vértice; $M\hat{B}C = M\hat{B}'O$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas y $\overline{BM} = \overline{MB'}$ por simetría; por criterio ALA $\overset{\Delta}{OMB'} = \overset{\Delta}{BMC}$; así $\left|\overline{OB'}\right| = \left|\overline{BC}\right|$. **(II)**

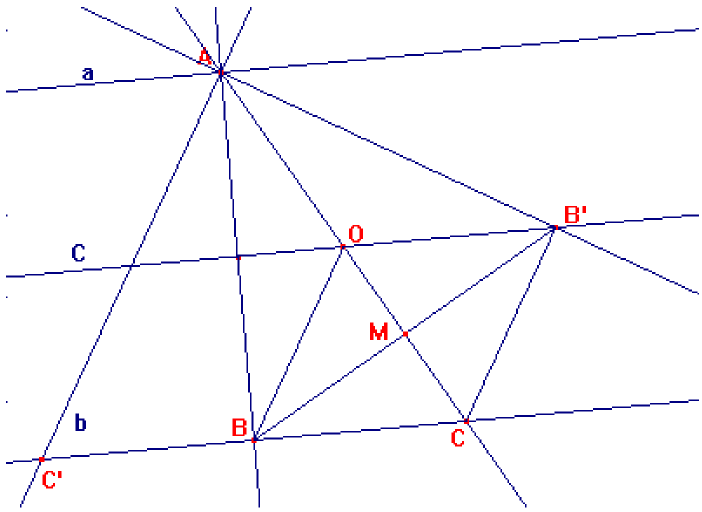
Por **(I)** y **(II)** $BOB'C$ paralelogramo.

Como $\left|\overline{BO}\right| = \left|\overline{OB'}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CB'}\right|$ ; $BOB'C$ es rombo.

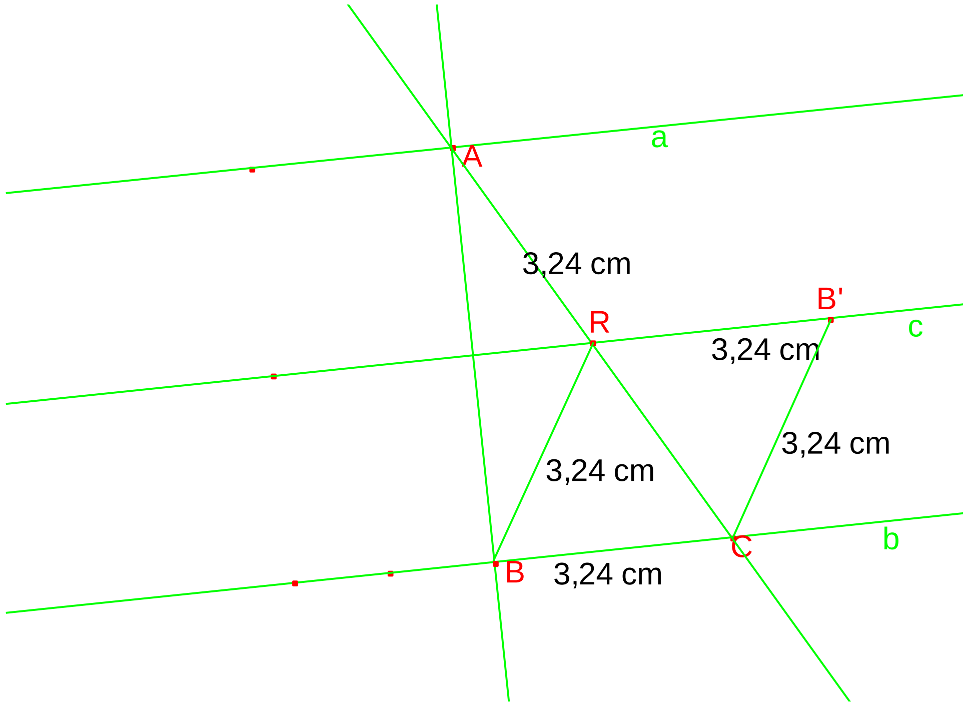
$\downarrow$ por simetría $\quad\downarrow$ por **(II)** $\quad\downarrow$ por simetría

El triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ (o $\overset{\Delta}{ACB'}$) es rectángulo en $B$ y $O$ punto medio de $\overline{AC}$ (por propiedad de base media). $O$ centro de la circunferencia circunscripta al $\overset{\Delta}{ABC}$. Así $\left|\overline{BO}\right| = \left|\overline{OC}\right| = r$ radio de dicha circunferencia y como $\left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{BC}\right|$, $\overset{\Delta}{OBC}$ equilátero; $B\hat{C}A$ =60º y $B\hat{A}C$ =30º. Luego para que $S_{\overline{AC}}(B) = B'$, el ángulo $B\hat{A}C = 30º$.

El problema tiene dos soluciones, la otra construcción sería $B\hat{A}C =$ -30º. Los puntos $C$ y $C'$ son los puntos intersección de los ejes de simetría con la recta b.




Haciendo referencia a lo planteado anteriormente, que no basta con utilizar el software para deducir una determinada propiedad geométrica invariante por el movimiento o para validar una conjetura, es que analizaremos la resolución de un alumno a este problema.




Sea r la recta que determinan A y C. La misma corta a la recta c en R y a la recta b en C. Se tiene que la recta r es eje de simetría, por lo tanto r es bisectriz de los ángulos que tengan vértice en r y lados que contengan a B y B'.

Puesto que B' debe pertenecer a c y R también, se puede decir que r es bisectriz del ángulos BRB' (entonces los ángulos BRC=CRB') y además BR=RB' (1) porque R pertenece al eje de simetría y B' es el homologo de  con respecto a la simetría de eje r. Análogamente r es bisectriz del ángulo BCB' (entonces los ángulos BCR=RCB') y BC=CB' (2). Puesto RC es un segmento común de los triángulos BRC y CRB', por criterio de congruencia éstos son iguales.

Al ser c paralela media de a y b, se tendrá que RBCB' es un paralelogramo, y de (1) y (2) se concluye que el mismo tiene todos los lados iguales. Por lo tanto para que B' pertenezca a c, B, C, R y B' deben formar una rombo, cuyos ángulos menores son la mitad de los mayores.

**Algunas consideraciones:** es indiscutible que el alumno pudo encontrar la solución del problema, pero… ¿es correcta su resolución?; ¿puedo asegurar  con lo demostrado que $RBCB'$ es paralelogramo?; ¿puedo asegurar  con lo demostrado que

$RBCB'$ es rombo?; ¿es correcta la conjetura $B, C, R, B'$ deben formar un rombo cuyos ángulos menores son la mitad de los mayores? ¿no debería validarla?

Con la idea de seguir abriendo puertas y desarrollando conceptos matemáticos y geométricos es que podríamos plantearnos la siguiente situación:

Sean **a** y **b** rectas paralelas y **c** la paralela media a **a** y **b**. Sean A ∈ **a** y B ∈ **b** tal que AB ⊥ **a**. Sea B’ ∈ **c** tal que $S_{\overline{AC}}(B) = B'$ con C ∈ **b**, demostrar que C también pertenece a la circunferencia circunscripta de $\overset{\Delta}{ABB'}$.

Reformulación del problema original:

Sean a y b rectas paralelas y c la paralela media a a y b. Sean A ∈ a y B ∈ b tal que AB ⊥ a. Hallar la isometría tal que $T(A) = A$ y $T(B) = C$ con C ∈ c.

Observación: Este problema incluye a la simetría axial trabajada en el problema anterior pero también se puede pensar como solución una rotación de centro A y ángulo 60º. La demostración de la primera conjetura está realizada en este trabajo y la de la segunda se puede escribir utilizando las mismas ideas que para la anterior.

## CONCLUSIONES

- Un mismo problema puede reformularse y trabajarse con distintas complejidades.
- El uso de un software como Cabri II Plus permite realizar conjeturas, hallar soluciones encontrar caminos para una demostración, descartar otras conjeturas… cuestión difícil de hacer sólo con lápiz y papel.
- El sólo uso del software no es suficiente para realizar las demostraciones pero ayuda a visualizar la situación y comenzar con la escritura de la demostración.

## BIBLIOGRAFÍA:

**Díaz Valencia, J. y Vergel, M.** (2003). Influencia del software Cabrí Geometry II en el rendimiento académico de los estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas e informática de la universidad Francisco de Paula Santander. Bogotá: Grupo de investigación Euler.

**Hershkowitz, R.** (2001). *Acerca del razonamiento en geometría*. Recuperado el 12 de mayo de 2008, de www.euclides.org/menu/articles/article104.htm

**Hölzl, R.** (1996). *How does dragging affect the learning of geometry*. International Journal of computers for Mathematical Learninf, 1, 169-187

**Laborde, C.** (1996). *Investigación y didáctica de las matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

**Recio, T.** (1999). *Compass avoidance*. Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, 53, 59-66