TRANSITANDO DE LA BIDIMENSIONALIDAD A LA TRIDIMENSIONALIDAD. UN PROBLEMA DE LUGAR GEOMÉTRICO

(1) Ana María Mántica – (2) Marcela Götte

(1) amantica@fhuc.unl.edu.ar – (2) mgotte@fhuc.unl.edu.ar

Universidad Nacional del Litoral. ARGENTINA

RESUMEN

En el siguiente trabajo se presenta un problema para trabajar con ***Cabri II Plus*** *y* ***Cabri 3D v2****, en el que se pretende abordar lo que Fischbeim denomina "Concepto figural". Fischbein plantea que es en el caso de los lugares geométricos que la relación profunda e íntima entre los aspectos lógicos y figurales son aplicados explícitamente, por esta razón considera que el uso sistemático de lugares geométricos son una importante herramienta didáctica para ahondar el entendimiento de la naturaleza de los conceptos figurales. Es un problema abierto que en general se resuelve en 2D. Pretendemos que a partir de la resolución en el plano se obtenga y analice la solución en 3D.*

INTRODUCCIÓN

Efraim Fischbeim plantea la noción de concepto figural, y considera "tres categorías de entidades mentales cuando se refiere a figuras geométricas: la definición, la imagen (basada en la experiencia perceptiva-sensorial, como la imagen de un dibujo) y el concepto figural. El concepto figural es una realidad mental, es el constructo manejado por el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Está desprovisto de cualquier propiedad concreta-sensorial, pero exhibe propiedades figurales" (Fischbeim, 1993, p.149). La particularidad del concepto figural es que incluye a la figura como una propiedad intrínseca. El significado de la palabra círculo en geometría, tal como es manipulado por nuestro proceso de razonamiento, no es reducible a una definición meramente formal. Es una imagen enteramente controlada por una definición. Sin este tipo de imágenes espaciales, la geometría no existiría como rama de las matemáticas. Necesitamos un esfuerzo intelectual para entender que las operaciones lógico- matemáticas manipulan sólo una versión purificada de la imagen, el contenido espacial- figural de la imagen. La componente figural de una figura geométrica debería quedar enteramente sometida a las restricciones formales, esta idea no es siempre entendida y es muy frecuentemente olvidada por el estudiante. En general se tiende a olvidar la definición bajo la presión de las restricciones figurales, esto representa un obstáculo grave en el razonamiento geométrico. Muchos errores que los estudiantes tienen en su razonamiento geométrico pueden ser explicados por la falta de correspondencia entre el aspecto conceptual y el figural de los conceptos figurales. Cuando la figura geométrica está completamente controlada conceptualmente, puede participar activamente de un razonamiento matemático formal y riguroso.

Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva de una persona cooperando a veces o en conflicto en otras situaciones. Pero el desarrollo de conceptos figurales generalmente no es un proceso natural. Una de las principales razones por las que la geometría es un tópico difícil en los programas escolares es que los conceptos figurales no se desarrollan naturalmente hacia su forma ideal. Fischbein plantea que es en el caso de los lugares geométricos que la relación profunda e íntima entre los aspectos lógicos y figurales son aplicados explícitamente y por esta razón considera que el uso sistemático de lugares geométricos son una importante herramienta didáctica para ahondar el entendimiento de la naturaleza de los conceptos figurales.

Colette Laborde plantea que la figura geométrica queda definida como el conjunto de pares formados por dos elementos: el primero el referente (Objeto de una teoría geométrica) y el segundo uno de los dibujos que lo representa y que se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente (el dibujo puede ser considerado un significante de un referente teórico). “El término figura geométrica remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones” (Laborde, 1996, p. 67).

Un mismo dibujo geométrico se puede interpretar de múltiples formas. La percepción interviene en la construcción de una interpretación siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva. “La enseñanza de la geometría ignora las relaciones entre objeto geométrico y dibujo al silenciar la diferencia entre ambas, o haciendo como si un lazo natural los uniera”. (p. 71). En general no se toma como objeto de aprendizaje la especificidad de las relaciones entre dibujo y geometría. Estas diferencias son sutiles y para lograr que los alumnos sean conscientes de ellas habría que proponer en la enseñanza:

- Situaciones que traten de dibujos, en las que la geometría sea una herramienta eficaz de modelización y de solución, que permitan realizar dibujos que satisfagan restricciones dadas de un modo más eficaz que el tanteo controlado por la percepción y que la geometría garantice la corrección del resultado.
- Situaciones en geometría en las que el recurso del dibujo y la experimentación con éste eviten introducirse en soluciones teóricas demasiado tediosas.

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE LUGAR GEOMÉTRICO

Presentaremos en este trabajo el estudio del siguiente problema:

Se tienen dos puntos fijos A y B; ¿dónde puede estar un punto C para que se forme un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, de manera que podamos anticipar que clase de triángulo (por lados o por ángulos) es? Estudiar el problema para cualquier ubicación del punto C.

Se puede dividir el problema en dos sub- problemas:

I) Se tienen dos puntos fijos A y B, hallar todos los puntos C que hagan que el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ resulte isósceles.

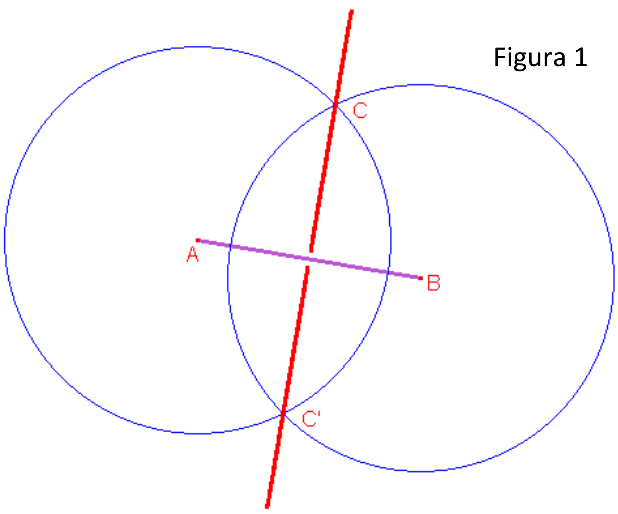


Figura 1

Se toma una circunferencia de centro en A y radio variable. Con la herramienta compás se toma una circunferencia con centro en B y el mismo radio que la anterior. Se toma C y C’ como la intersección de ambas circunferencias. Con “traza activada” para C y C’ queda determinado el lugar geométrico de los puntos del plano tal que $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{ABC}'$son isósceles con $\overline{AC} = \overline{CB}$ y $\overline{AC'} = \overline{C'B}$ respectivamente (Figura 1). Este lugar geométrico es la recta mediatriz de $\overline{\text{AB}}$, excluyendo el punto medio de $\overline{\text{AB}}$ ya que si C pertenece a $\overline{\text{AB}}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ no es un triángulo.

Hay otras soluciones ya que $\overset{\Delta}{ABC}$ puede ser isósceles siendo $\overline{AB} = \overline{AC}$. Considerando esto obtenemos los puntos de las circunferencias de centro A que pasa por B y la de centro B que pasa por A, excluyendo los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con dichas circunferencias (Figura 2).

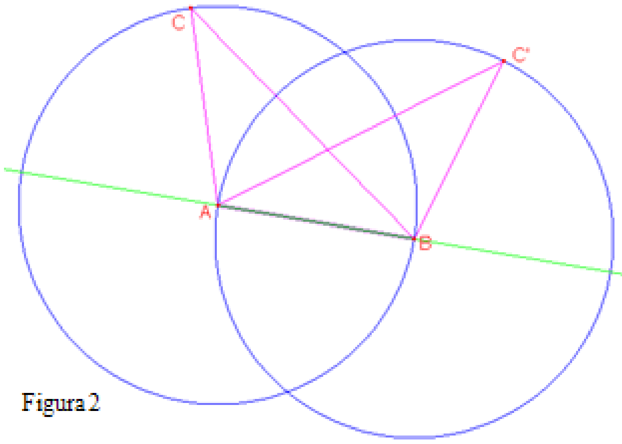


Figura 2

Demostración:

Demostremos que los puntos pertenecientes a las circunferencias de centro A y que pasa por B y de centro B y que pasa por A y los puntos de la mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, excluyendo de ellos los puntos de intersección con la recta $\overleftrightarrow{AB}$ definen el lugar geométrico de los puntos del plano que determinan con A y B un triángulo isósceles.

Debemos probar que:

1. Si un punto pertenece a dicho lugar geométrico, entonces con A y B forman un triángulo isósceles.
   Si C $\in$ a la circunferencia de centro A que pasa por B o a la de centro B que pasa por A, entonces, $\overline{AB} = \overline{AC}$ o $\overline{AB} = \overline{BC}$, respectivamente, con lo que $\overset{\Delta}{ABC}$ es isósceles. Si C $\in$ a la mediatriz de $\overline{AB}$, entonces $\overline{CB} = \overline{AC}$, y $\overset{\Delta}{ABC}$ es un triángulo isósceles. ♠
2. Si un punto del plano, forma con A y B un triángulo isósceles, entonces pertenece a dicho lugar geométrico.

Si $\overset{\Delta}{ABC}$ *es un triángulo isósceles, entonces* $\overline{AB} = \overline{AC}$ *ó* $\overline{CB} = \overline{AC}$ *ó* $\overline{AB} = \overline{BC}$. *En el primer caso, C está en la circunferencia de centro A y que pasa por B, en el segundo caso C está en la mediatriz del segmento* $\overline{AB}$ *y en el tercer caso C está en la circunferencia de centro B que pasa por A. De estas dos circunferencias y mediatriz se deben excluir a los puntos de intersección con la recta* $\overleftrightarrow{AB}$ *ya que si C pertenece a dicha recta A, B y C estarán alineados y por definición de triángulo, esto no puede ocurrir.* ♠

CONCLUSIÓN EN 2D

Para que $\overset{\Delta}{ABC}$ sea un triángulo isósceles, C pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, o a la circunferencia de centro A que pasa por B, o a la circunferencia de centro B que pasa por A, exceptuando los cinco puntos de la intersección de la mediatriz y las dos circunferencias con la recta que contiene al segmento $\overline{\mathrm{AB}}$.

También de esto podemos deducir que existen sólo dos puntos para que $\overset{\Delta}{ABC}$ sea equilátero, donde C es la intersección de los lugares geométricos donde $\overset{\Delta}{ABC}$ es isósceles (Figura 3).

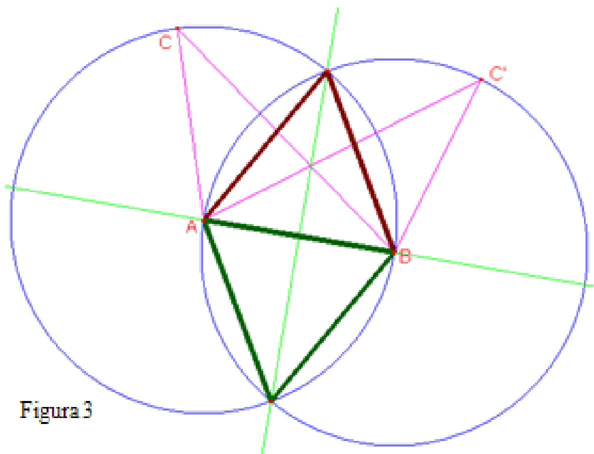


Figura 3

Además todo otro punto que no pertenezca a dicho lugar geométrico determina con A y B un triángulo que será escaleno, excepto todos los de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (tres puntos no alineados determinan un triángulo).

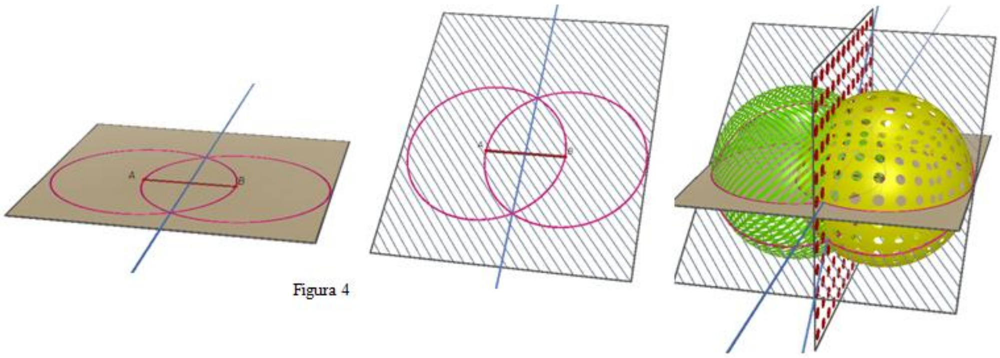


Figura 4

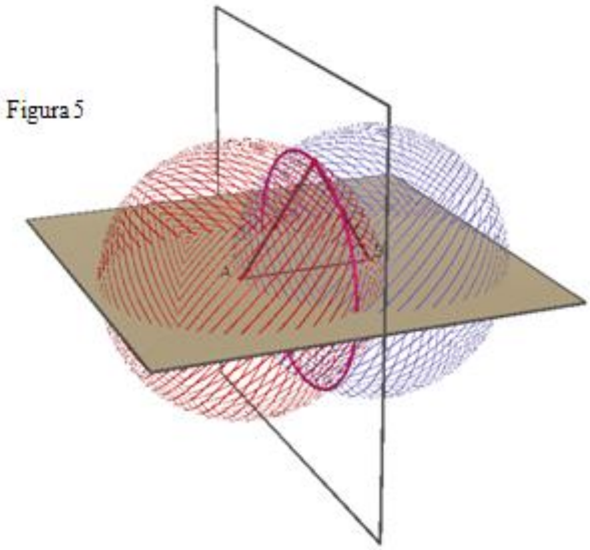
En uno de los infinitos planos que contiene a la recta $\overleftrightarrow{AB}$, se obtiene el lugar geométrico discutido en 2D (Figuras 1 y 2). Para determinar el lugar geométrico en 3D, observemos que debemos determinar los triángulos isósceles en el que uno de los lados es $\overline{\mathrm{AB}}$. Luego buscamos una isometría del espacio que deje fijos A y B. La transformación rígida que cumple con esta condición es el giro alrededor de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (también la simetría axial de eje $\overleftrightarrow{AB}$ cumple con esta condición pero la podemos considerar como un caso particular de giro cuyo ángulo es de 180º)[1]. Al girar la circunferencia de centro B y radio $\overline{\mathrm{AB}}$ alrededor de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, obtenemos la esfera de centro B y radio $\overline{\mathrm{AB}}$. Lo mismo puede razonarse con la circunferencia de centro A y radio $\overline{\mathrm{AB}}$. Si giramos la recta mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, en uno cualquiera de los planos que contiene a $\overleftrightarrow{AB}$, obtendremos el plano de simetría de $\overline{\mathrm{AB}}$, que por definición[2] contiene a todas las mediatrices a $\overline{\mathrm{AB}}$ (Figura 4). Como el giro es una transformación rígida, conserva las distancias y de esta forma se puede justificar el lugar geométrico en 3D.

CONCLUSIÓN EN 3D

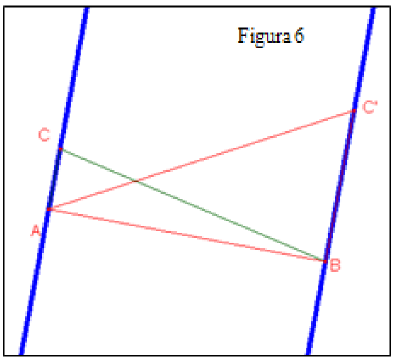
Para que $\overset{\Delta}{ABC}$ sea un triángulo isósceles, C pertenece al plano de simetría del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, o a la superficie esférica de centro A y radio $\overline{\mathrm{AB}}$, o a la superficie esférica de centro B y radio $\overline{\mathrm{AB}}$, exceptuando los cinco puntos de la intersección del plano de simetría y las dos superficies esféricas con la recta que contiene al segmento $\overline{\mathrm{AB}}$.

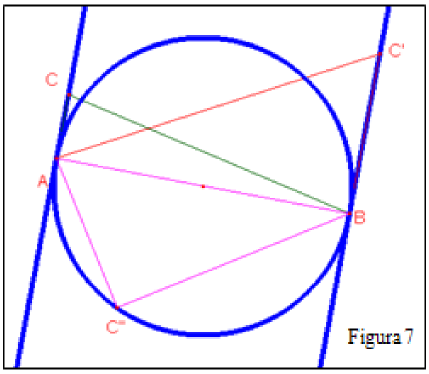
[1] Se puede determinar este lugar geométrico utilizando simetría especular, considerando como plano de simetría a los infinitos planos que contienen a la recta $\overleftrightarrow{AB}$, ya que en ellas los puntos A y B quedan fijos.
[2] Definición considerada de Geometría Métrica de P. Puig Adam.

Para que el triángulo sea equilátero C debe pertenecer a la intersección de los lugares geométricos en donde $\overset{\Delta}{ABC}$ es isósceles. Dicha intersección es la circunferencia con centro en el punto medio de $\overline{AB}$ y radio ½ $\overline{AB}$ y que se encuentra en el plano perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (Figura 5).



II) Se tienen dos puntos fijos A y B, encuentren todos los puntos C que hagan que el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ resulte rectángulo.





Se toma la perpendicular a $\overline{AB}$ por A y la recta perpendicular a $\overline{AB}$ por B. Si C pertenece a dichas rectas el ángulo $\widehat{CAB} = 90º$ o $\widehat{C'BA} = 90º$ (Figura 6) y $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{ABC'}$ son triángulos rectángulos en A o en B, respectivamente. Pero queda otra posibilidad: que $\overset{\Delta}{ABC}$ sea rectángulo en C. Por el Lugar geométrico de Thales[3] (Figura 7) dichos puntos están en la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, con centro en el punto medio de $\overline{AB}$. Luego el lugar geométrico de los puntos C del plano que forman con dos puntos A y B fijos un triángulo rectángulo, son los puntos de las rectas perpendiculares a $\overline{AB}$ por A y por B y la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, exceptuando los puntos A y B.

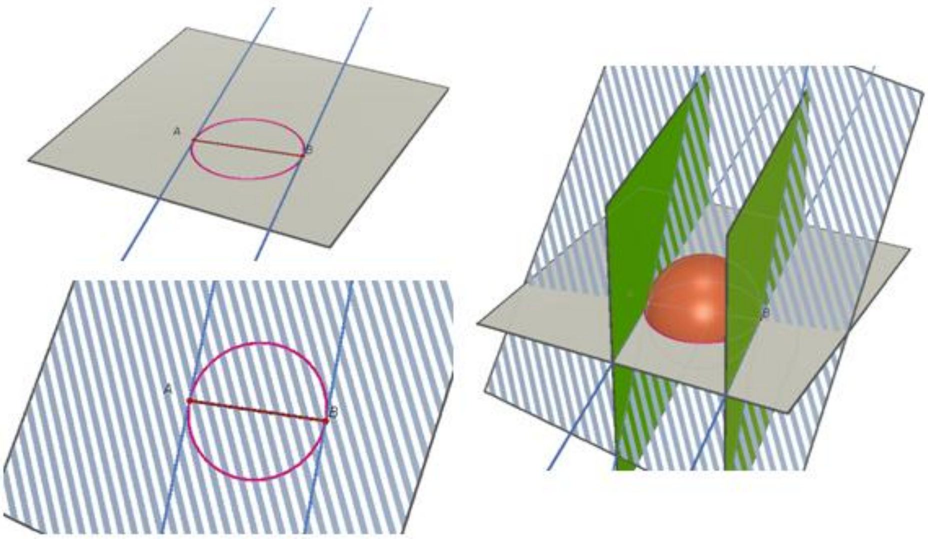
Demostración: La demostración se puede efectuar utilizando argumentos similares al caso anterior.

CONCLUSIONES EN 2D

Para que $\overset{\Delta}{ABC}$ sea un triángulo rectángulo, C pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, o a las rectas tangentes a dicha circunferencia por A y por B, exceptuando los puntos A y B.

Razonando de forma análoga al caso anterior se puede obtener el lugar geométrico en 3D (Figura 8).

Figura 8



[3] "Lugar geométrico de los vértices de un ángulo recto cuyos lados pasan por dos puntos fijos A y C es la circunferencia de diámetro AB" (Puig Adam, p. 52)

CONCLUSIONES EN 3D

Para que $\overset{\Delta}{ABC}$ sea un triángulo rectángulo, C pertenece a la superficie esférica de diámetro $\overline{\mathrm{AB}}$ y centro en su punto medio, o a los planos tangentes a dicha circunferencia por A y por B, exceptuando los puntos A y B. (Figura 9)

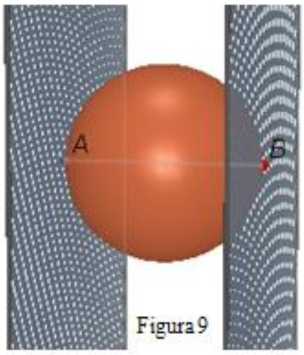


Figura 9

Si tomamos un punto C interior a la circunferencia de diámetro $\overline{\mathrm{AB}}$, el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es obtusángulo. Para justificar esta afirmación, tracemos la recta $\overleftrightarrow{CB}$ (sin pérdida de generalidad se puede tomar la recta $\overleftrightarrow{CA}$) que corta a la circunferencia en un punto T[4] (Figura 10). Tracemos el triángulo $\overset{\Delta}{ATB}$, puesto que T pertenece a la circunferencia el ángulo $A\hat{T}B = 90^{\circ}$. Sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo es fija e igual a 180º, por lo tanto comparemos los ángulos de los triángulos $A\hat{T}B$ y $A\hat{C}B$:

$A\hat{B}C = A\hat{B}T; C\hat{A}B < T\hat{A}B \quad \therefore A\hat{C}B > A\hat{T}B = 90^{\circ}$. Así $\overset{\Delta}{ABC}$ es obtusángulo si C es interior a la circunferencia de diámetro $\overline{\mathrm{AB}}$, donde C no pertenece al segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ (aquí los puntos estarían alineados).

[4] Por el axioma de continuidad.

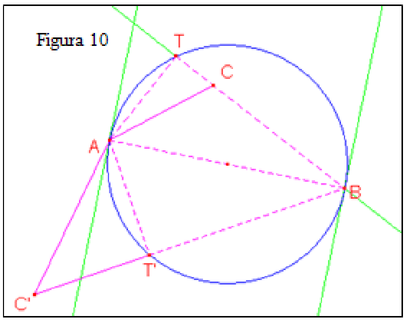


Figura 10

Si C está en la región del plano determinada por la intersección del semiplano de borde la recta perpendicular a $\overline{AB}$ por A y que contiene al punto B y el semiplano de borde la recta perpendicular a $\overline{AB}$ por B y que contiene a A y es exterior a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ pero no pertenece a las tangentes a dichas circunferencias ni a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ entonces el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es acutángulo. El argumento para justificarlo es el siguiente: $A\hat{B}C$ < 90º pues C no pertenece a la perpendicular a $\overline{AB}$ por B. $C\hat{A}B <$ 90º por la misma razón que el caso anterior y $A\hat{C}B < A\hat{T}B = 90^{o}$ pues $\widehat{ATB} + \widehat{TBA} = \widehat{ACB} + \widehat{CBA}$ y $\widehat{ABC} > \widehat{ABT}$ (Figura 11).

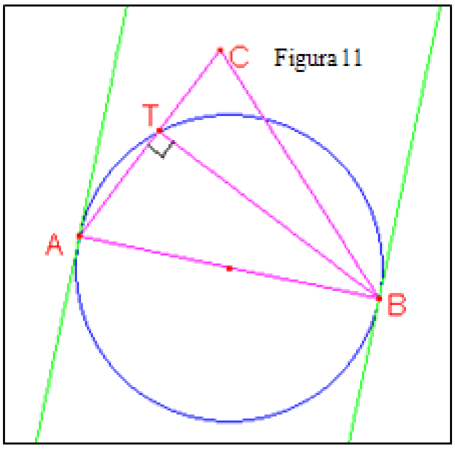


Figura 11

Si C no pertenece a la intersección de los semiplanos determinados en el párrafo anterior, $\overset{\Delta}{ABC}$ es obtusángulo ya que $\widehat{CAB}$ o $C\hat{B}A$ es mayor a 90º.

PROBLEMAS PARA SEGUIR PENSANDO…

Determinar el lugar de los puntos C, en 2D y en 3D, para que $\overset{\Delta}{ABC}$ sea:

a. Rectángulo isósceles.
b. Rectángulo escaleno.
c. Acutángulo isósceles.
d. Acutángulo escaleno.
e. Obtusángulo isósceles.
f. Obtusángulo escaleno.

BIBLIOGRAFÍA.

Colacelli, S.; García, P; García, A. y Zorzoli, G. (1997) *Lugares geométricos*. Buenos Aires: Tiempos editoriales.

Fischbein, E. (1993) The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, 24, 139- 162.

Laborde, C. (1996) Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. Investigación y didáctica de las matemáticas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Puig Adam, P. (1980) Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos. Madrid: Gómez Puig Ediciones.